

THESES

PRESENTEES

A LA FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Françoise GERARD

PREMIERE THESE

Théorie géométrique des jeux différentiels qualitatifs à deux joueurs

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 13-11-68 devant la Commission d'examen

M. VILLAT

Président

MM. BLAQUIERE
VILLE

Examineurs

MM. BOUX
PICINBONO

Membres invités

POLAK (Berkeley - Californie - USA)

T H E S E S

PRESENTEES

A LA FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Françoise GERARD

PREMIERE THESE

Théorie géométrique des jeux différentiels qualitatifs à deux joueurs

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le

devant la Commission d'examen

M. VILLAT

Président

**MM. BLAQUIERE
VILLE**

Examineurs

**MM. BOUX
PICINBONO**

Membres invités



UNIVERSITE DE PARIS
FACULTE DES SCIENCES DE PARIS
PROFESSEURS

JANVIER 1967

Le Doyen M. ZAMANSKY

GRASSE	T Evolution des êtres organisés	THELLIER	T Physique du globe
PREVOST	T Chimie organique	PONCIN	T Mécanique générale
WYART	T Minéralogie et cristallographie	DUBREIL	T Arithmétique et théorie des nombres
TEISSIER	T Zoologie	GAGNIARD	T Géophysique appliquée
AUGER	T Physique quantique et relativité	CHAMPETIER	T Chimie macromoléculaire
MONNIER	T Physiologie générale	CUVILLIER	T Micropaléontologie
PIVETEAU	T Paléontologie	TRILLAT	Microscopie et diffraction électronique
ROCARD	T Physique E.N.S.	WIEMANN	T Chimie organique et structurale
CARTAN	T Mathématiques E.N.S.	VASSY	T Physique de l'atmosphère
LAFFITTE	T Chimie générale	DESTOUCHES	T Théorie physique
N L	T Géométrie supérieure	AMIEL	T Chimie générale
COULOMB	T Physique du globe	J.P. MATHIEU	T Physique optique
CHRETIEN	T Chimie minérale	COUTEAUX	T Cytologie
BOCQUET	T Zoologie	CHOQUET	T Théorie des fonctions et topologie
KASTLER	T Physique E.N.S.	FELDMANN	T Biologie végétale marine
EPHRUSSI	T Génétique	JOST	T Physiologie comparée
GAUTHERET	T Biologie végétale CPEM	FORTET	T Calcul des probabilités et physique mathématiques
LUCAS R	T Recherches physiques	SCHWARTZ	T Calcul différentiel et intégral
THOMAS A.	T Biologie	CHOUARD	T Physiologie végétale
MORAND	T Physique enseignement	MALAVARD	T Aviation (technique aéronautique)
SOLEILLET	T Physique CPEM	BRELOT	T Analyse supérieure
FORTIER	T Mécanique expérimentale des fluides	EICHHORN	T Botanique
DRACH	T Biologie maritime	BENARD	T Chimie appliquée
QUENEY	T Météorologie et dynamique de l'atmosphère	DUGUE	T Statistique mathématique
GALLIEN	T Embryologie		
Mlle CAUCHOIS	T Chimie physique		

SOULAIRAC	T Psychophysiologie	CAMUS	T Physiologie végétale
ULRICH	T Physiologie végétale appliquée	CURIEN	T Minéralogie et cristallographie
KIRRMANN	T Théories chimiques	POSSOMPES	T Zoologie
CHADEFAUD	T Botanique	PULIMANN	T Chimie quantique
Mlle LE BRETON	T Physiologie de la nutrition	TEILLAC	T Physique nucléaire et radioactivité
LELONG	T Application de l'analyse à la géométrie	VILLE	T Econométrie
DEVILLIERS	T Anatomie comparée	FREYMANN	T Recherches physiques
EHRESMANN	T Topologie algébrique	ROLLET	T Chimie minérale
FRANCON	T Physique SPCN	Mlle JOSIEN	T Chimie SPCN
GLANGEAUD	T Géographie physique, géologie dynamique	CHEVALLEY	T Géométrie algébrique et théorie des groupes
GODEMENT	T Mathématiques MGP	GERMAIN	T Mécanique, théorie des fluides
PISOT	T Techniques mathématiques de la physique	LUCAS G.	T Géologie
ROCH	T Géologie	ALLARD	T Chimie physique
SCHATZMANN	T Astrophysique	BERTHELOT	T Physique des particules fondamentales
TERMIER	T Géologie générale	BRICARD	T Météorologie
ZAMANSKY	T Mathématiques générales	Mme ALBE-FESSARD	T Psycho-physiologie
LENNUIER	T Physique MGP	M. JULIA	T Etude des molécules naturelles complexes
ROUTHIER	T Géologie appliquée	MAGAT	T Physico-chimie des rayonnements
Mme TONNELAT	T Physique théorique	MONOD	T Chimie du métabolisme
DIXMIER	T Mathématiques MPC	BRUN	T Mécanique des fluides I
SOUCHAY	T Chimie générale	Mme DUBREIL	T Mathématiques (Agrégation)
AIGRAIN	T Electrotechnique	Mme LELONG	T Mathématiques II ENS
BRUSSET	T Chimie systématique	BELLAIR	T Géologie SPCN
LEVY	T Physique théorique des hautes énergies	BOUSSIÈRES	T Radiochimie
Mme CHAIX	T Chimie biologique	Mme COUTURE	T Thermodynamique et mécanique
Mme HUREL PY	T Biologie végétale CPEM	FRANC	Biologie animale CPEM
PANNETIER	T Chimie générale I	SCHNELL	T Botanique tropicale
NORMANT	T Synthèse organique	STOLKOWSKI	T Physiologie générale
YVON	T Théories physiques	ACHER	T Chimie biologique
COTTE	T Physique électricité	BAUDOIN	T Biologie animale CPEM
DUBOIS J.E	T Chimie organique physique	BEAUMONT	Biologie animale SPCN
LAMOTTE	T Zoologie E.N.S.	BLAMONT	Géophysique ionosphère
OLMER	T Energétique générale	BOUREAU	T Botanique
GAUTHIER	T Mécanique appliquée	CURIE D.	Physique MGP
BARCHEWITZ	T Chimie physique		
BROSSEL	T Physique atomique		
BUSER	T Physiologie comparée		

DURAND DELGA	T Géologie	DEHEUVELS	T Mathématiques propédeutiques
HELLER	T Physiologie végétale	FURON	T Géologie SPCN
TORTRAT	T Calcul des probabilités	Mme GANS	T Génétique
CAILLEUX	T Géologie SPCN	GENEVES	Biologie végétale CPEM
MAGNAN	T Physique électricité	HUPE	T Pétrographie
DAUDEL	T Mécanique ondulatoire	HOLLANDE	T Biologie générale
Mme CHOQUET- BRUHAT	T Mécanique analytique et mécanique céleste	LIONS	T Analyse numérique
Mlle VEIL	T Physiologie générale	MAITTE	T Chimie organique
LWOFF	T Microbiologie	NICOLAS	Géologie appliquée
SIESTRUNCK	T Mécanique physique et expérimentale	PANIGEL	Biologie générale
CABANNES	T Mécanique théorique	RAVIER	T Pétrographie
CAIRE	T Géographie physique et géologie dynamique	MOREL F	T Physiologie comparée
COMOLET	T Mécanique des fluides	ROSEAU	T Mécanique théorique des fluides
DELLOUE	T Physique de l'exosphère	ROUBINE	T Electronique E.S.E.
HOUILLON	T Biologie animale	SILBER	T Chimie CPEM
OLIVIER	T Anthropologie	UEBERSFELD	T Electronique
SAMUEL	T Mathématiques (ENS Jeunes filles)	THIRY	T Mécanique céleste
DE POSSEL	T Analyse numérique	ABELES	T Physique SPCN
CHARLOT	T Chimie analytique	AMAT	T Thermodynamique
CHATELET	T Chimie CPEM	BALKANSKI	Physique MPC. 1
MATTLER	T Physique SPCN	LE CORRE	T Electricité
AUBOUIN	T Géologie	NATAF	T Physique nucléaire et radioactivité
Mme BENOIT-GUEUTAL	T Physique nucléaire et radioactivité	ECHALIER	Biologie animale CPEM
BOUGIS	Biologie végétale marine Villefranche sur mer	BARRAUD	T Physique CPEM
RIGAUDY	T Chimie SPCN	DARS	Géologie structurale et appliquée
COLLONGUES	T Chimie appliquée	CAMEFORT	Botanique (agrégation)
DUBERT	Biochimie	VICHNIEWSKY	T Mécanique industrielle
NOZIERES	T Physique fondamentale	SIGWALT	Chimie SPCN
CADIOT	Chimie organique	BLAQUIERE	Automatique
IVANOFF	T Océanographie physique	BARUCH	Physique propédeutique
FRANCOIS	Zoologie	ARNOUS	T Physique théorique
TALBOT	Génie chimique	SLONINSKI	Génétique
Mme NOUGAREDE	Botanique	MALLIAVIN	T Mathématiques propédeu- tique
BRUHAT	T Mathématique MPC	GAUDEMAR	Chimie propédeutique
FOURNET	Electricité générale	BROUSSE	T Mécanique théorique
		ROSCH	T Astronomie

GUY	T Physique expérimentale	DUQUESNES	Physique CPEM
LAZARD	T Mathématiques MPC	SCHUTZENBERGER	T Programmation
MOREL P.	Physique MPC	TREMULLON	Chimie MPC
ARSAC	Programmation	FAYARD	Chimie MPC
LEFEBVRE	T Chimie MPC	BUVET	Chimie CPEM
BOK	Physique fondamentale	AUTHIER	Minéralogie et cristallographie
CHAPEVILLE	Biochimie	BONNEFILLE	Electrotechnique
BENOIT	Physique CPEM	Mme PUISEUX DAO	Biologie végétale
RIO	Chimie CPEM	BERGER	T Géométrie supérieure
JAUZEIN	Géologie ENS	Mlle LIBERMANN	T Mathématiques
PREVOST G.	Biologie cellulaire	DEDONDER	T Biologie cellulaire
FAVARD P.	Biologie animale CPEM	DUFOUR	T Electronique I. U. T
Mme CHARNIAUX-COTTON	Evolution des êtres organisés	SCHAAL	Chimie CPEM
Mlle FICINI	Chimie CPEM	BAUCHOT	Anatomie comparée
LEQUEUX	Astronomie	LANCE	B. V. CPEM
COHEN TANNOUDJI	Physique atomique	GIRAUD	Botanique E. N. S.
HERVE	T Mathématiques	HULIN	Physique P. C.
Mme PECKER-WIMEL	T Astrophysique	VIGIER	Génétique
TAVERNIER	Physique PC	GUERN	Biologie végétale
DURAND Michel	Biologie animale SPCN	SLODZIAN	Physique CPEM
PASCAUD	Physiologie	LACOMBE	Logique mathématique
Mme PETIT	Biologie animale CPEM	TAVLITZKI	Biologie cellulaire
CAGNAC	Electricité	ARVIEU	Physique CPEM
FALK-VAIRANT	Physique nucléaire	TAXI	B. A. CPEM
KRASNER	T Mathématiques	COLLENOT	B. A. CPEM
BENZECRI	T Statistiques	BASSELIER	Chimie propédeutique
VINH MAU	Physique MGP	BADOUAL	Electronique I. U. T.

Le Secrétaire Général,
R. POUILLAIN

R E M E R C I E M E N T S

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur le Professeur BLAQUIERE d'avoir bien voulu diriger cette Thèse et de m'avoir assuré de bonnes conditions de travail au Laboratoire d'Automatique Théorique de la Faculté des Sciences de Paris.

Je remercie Monsieur le Professeur VILLAT d'avoir accepté de présider le Jury et Messieurs les Professeurs VILLE, BOUIX et PICINBONO d'avoir bien voulu faire partie de ce Jury.

Cette recherche a été développée dans le cadre de la Convention 66-00-461 avec la Délégation Générale à la Recherche Scientifique et Technique, et avec l'aide du Commissariat à l'Energie Atomique.

Je remercie le Centre d'Etudes Théoriques de la Détection et des Communications du soutien matériel qu'il m'a apporté au cours de ce travail.

Une partie de ces recherches a été effectuée aux Etats-Unis ⁽¹⁾ et je remercie le Ministère des Affaires Etrangères de la bourse qu'il m'a accordée.

(1) Université de BERKELEY (Californie) - Avril-Octobre 1967.

I N T R O D U C T I O N

L'étude que nous présentons porte sur les Jeux Différentiels Qualitatifs, sujet qui à notre connaissance n'a été abordé que par R. ISAACS. Notre travail a consisté tout d'abord à définir un jeu (à deux joueurs) par ses règles et ses objectifs et à préciser ces deux notions.

Nous avons ensuite développé une théorie des jeux différentiels qualitatifs en adoptant une méthode analogue à celle qu'ont mise au point BLAQUIERE et LEITMANN dans l'étude des Processus Optimaux et en nous référant aux travaux des Russes BOLTYANSKII, GAMKRELIDZE, KELENDZHERIDZE, MISHCHENKO, PONTRYAGIN.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION.

CHAPITRE I. BASES DE LA THEORIE DES JEUX QUALITATIFS A DEUX JOUEURS.

1.1	Equations d'état et hypothèses.	1.
1.2	Stratégies admissibles.	2.
1.3	Cibles.	3.
1.4	Temps de transfert.	3.
1.5	Solutions maximales. Règles du jeu.	4.
1.6	Courbes descriptives. Trajectoires. Trajets.	8.
1.7	Couples stratégiques faiblement et fortement jouables.	11.
1.8	Objectifs du jeu.	15.
1.9	Ensembles A_e et B_p , A et B , a et b . Carte du jeu.	15.
1.10	Lemme 1.1.	18.
1.11	Lemme 1.2.	22.
1.12	Corollaire 1.1.	26.
1.13	1re Hypothèse fondamentale.	29.
1.14	Stratégies pures. Hypothèse de jeu particulière $A = \text{comp } B$.	29.
1.15	Trajets appartenant à la frontière F . Lemme 1.3.	31.
1.16	Autres propriétés des F -trajets.	33.
1.17	Propriétés de deux familles de trajets.	34.
1.18	Lemme 1.4.	36.
1.19	Gradient et vecteur adjoint.	40.
1.20	Un principe du Minimax. Théorème 1.1.	44.
1.21	Systèmes autonomes et cibles indépendantes du temps.	48.
1.22	Exemple 1.1.	51.

CHAPITRE II. STRATEGIES OPTIMALES - THEOREME DU MINIMAX.

2.1	Stratégies optimales - Ensembles du jeu.	57.
2.2	Propriétés des ensembles du jeu.	58.
2.3	Stratégies optimales sur un ensemble.	59.
2.4	Surface du jeu - Propriétés.	60.
2.5	P-Trajets et E-Trajets.	63.
2.6	Hypothèse 2.1 - Lemmes 2.2 et 2.3.	63.
2.7	Propriété fondamentale.	65.
2.8	Equation linéaire et équation adjointe.	66.
2.9	Lemmes 2.4 et 2.5.	68.
2.10	Trajets appartenant à $\square$.	72.
2.11	Propriétés de deux familles de trajets.	72.
2.12	Lemme 2.6.	77.
2.13	Gradient et vecteur adjoint.	81.
2.14	Conditions de transversalité.	85.
2.15	Principe du Minimax - Théorème 2.1.	92.
2.16	Contraintes et équation adjointe.	95.
2.17	Lemme 2.7. Barrières.	99.
2.18	Exemples.	103.

CHAPITRE III. LIENS ENTRE LES JEUX QUALITATIFS ET LES JEUX QUANTITATIFS.

3.1	Différentes sortes de jeux.	112.
3.2	Minimax local.	120.
3.3	Jeux quantitatifs.	127.

<u>FIGURES.</u>	134.
-----------------	------

<u>BIBLIOGRAPHIE.</u>	136.
-----------------------	------

Dans un jeu à deux joueurs, J^P et J^E , l'état du jeu est défini par un nombre fini n de variables réelles. Les règles sont définies par la donnée :

- 1) d'un ensemble G , $G \subseteq E^n$, ensemble des états,
 - 2) de deux ensembles J^P et J^E , ensembles de stratégies des joueurs J^P et J^E respectivement,
 - 3) d'une application γ de $G \times J^P \times J^E$ dans G .
- Chaque joueur connaît à chaque instant l'état du jeu X , $X \in G$

Dans un jeu différentiel, f^P et f^E sont deux ensembles de fonctions de X , définies sur G , à valeurs réelles et l'application γ est définie à partir d'un système différentiel :

$$\dot{X} = f(X, u, v) \quad (1)$$

où $X = (X_1, \dots, X_n)$ est l'état du jeu et où u et v sont des paramètres réels choisis respectivement par J^P et J^E à chaque instant ; $u \in E^r$, $v \in E^s$.

Une partie est l'évolution de l'état du jeu, sur un intervalle de temps borné, à partir d'un état initial X^i donné.

Les paramètres u et v qui interviennent dans l'équation (1) sont les valeurs des stratégies, à chaque

instant, au cours d'une partie. u et v sont astreints à appartenir à des ensembles K^p et K^e , sous-ensembles de E^p et E^e respectivement, où K^p et K^e peuvent dépendre de X .

Dans les jeux qualitatifs que nous avons étudiés, nous avons distingué deux cas, celui des jeux à deux cibles et celui des jeux à une cible. Les cibles sont des sous-ensembles donnés de G .

Dans un jeu à deux cibles θ^p et θ^e , les joueurs j^p et j^e ont pour objectif d'amener l'état du jeu dans θ^p et θ^e respectivement. Dans un jeu à une cible (θ^p par exemple), j^p a pour objectif d'amener l'état du jeu dans θ^p et j^e doit éviter que cela ne se produise.

Dans le premier chapitre, nous avons introduit les notions de couples stratégiques faiblement jouables et fortement jouables, et nous avons défini la "carte du jeu". A partir de ces notions, dans le deuxième chapitre nous définissons des stratégies optimales pour chacun des joueurs, les ensembles du jeu $\tilde{Q}^p$ et $\tilde{Q}^e$ et la surface du jeu. Cette surface a des propriétés analogues à celle introduite dans les jeux quantitatifs.

Le problème des jeux qualitatifs peut alors être formulé ainsi :

(a) dans un jeu à deux cibles :

- 1) si $X^i \in \tilde{Q}^P$, alors J^P est sûr de "gagner", quelle que soit la stratégie de J^E , si sa stratégie est optimale.
- 2) si $X^i \in \tilde{Q}^E$, alors J^E est sûr de gagner, quelle que soit la stratégie de J^P , si sa stratégie est optimale.
- 3) si $X^i \notin \tilde{Q}^P \cup \tilde{Q}^E$, alors il n'y a pas de stratégie optimale pour J^P ni pour J^E .

(b) dans un jeu à une cible (θ^P par exemple)

- 1) si $X^i \in \tilde{Q}^P$, alors J^P est sûr de gagner, quelle que soit la stratégie de J^E , si sa stratégie est optimale.
- 2) si $X^i \in \tilde{Q}^E$, alors J^E peut empêcher J^P de gagner, quelle que soit la stratégie de J^P , si sa stratégie est optimale.
- 3) si $X^i \notin \tilde{Q}^P \cup \tilde{Q}^E$, alors il n'y a pas de stratégie optimale pour J^P ni pour J^E .

Il résulte des définitions que nous avons adoptées, que

$\tilde{Q}^P \cap \tilde{Q}^E = \emptyset$. Par suite les cas a.1 et a.2 s'excluent mutuellement, il en est de même des cas b.1 et b.2.

Dans les cas a.1, a.2 et b.1 il y a un gagnant qui est connu dès le début de la partie.

Au début d'une partie, les questions qui se posent sont les suivantes :

- 1) le point X^i appartient-il ou non à $\tilde{Q}^P \cup \tilde{Q}^E$?
- 2) si $X^i \in \tilde{Q}^P \cup \tilde{Q}^E$, ce point est-il dans $\tilde{Q}^P$ ou dans $\tilde{Q}^E$?
- 3) si $X^i \in \tilde{Q}^P$, quelle stratégie sera optimale pour J^P ?
 si $X^i \in \tilde{Q}^E$, quelle stratégie sera optimale pour J^E ?

Il est possible de répondre à ces questions dans le cas où $\tilde{Q}^P$ et $\tilde{Q}^E$ ont une frontière commune.

On établit un théorème du Minimax le long de trajets appartenant à cette frontière (qui est la surface du jeu). Cette frontière et ces trajets ont des propriétés analogues à celles de la surface du jeu et des trajets optimaux définis dans les jeux quantitatifs.

Dans le dernier chapitre, nous précisons ces analogies et nous montrons que l'étude de certains jeux qualitatifs peut être ramenée à celle de jeux quantitatifs.

CHAPITRE I

BASES DE LA THEORIE DES JEUX QUALITATIFS A DEUX JOUEURS

1.1 EQUATIONS D'ETAT ET HYPOTHESES.

On appellera $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ le vecteur d'état, ou point représentatif du jeu, dans l'espace euclidien à n dimensions E^n ; la variable $x_n = t$ est le temps. Nous supposons que le jeu est régi par l'équation différentielle vectorielle :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, v) \quad (1.1)$$

où $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $f_n(x, u, v) \equiv 1$

et où $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ et $v = (v_1, v_2, \dots, v_s)$ sont respectivement des vecteurs des espaces euclidiens E^r et E^s .

A chaque instant les joueurs J^P et J^E connaissent l'état du jeu, X , et choisissent les vecteurs u et v .

On supposera que X appartient à un sous-ensemble ouvert G de E^n , que les vecteurs u et v appartiennent respectivement aux sous-ensembles U et V de E^r et E^s , et que les fonctions f_j , $j = 1, 2, \dots, n$, sont de classe C^1 sur $G \times U \times V$.

† Dans la suite $\text{comp } S$ désignera le complément de S dans G .
Ainsi on notera par : $\partial S \triangleq \overline{S} \cap \overline{\text{comp } S}$ la frontière de S dans $\overline{G}$.

1.2 STRATEGIES ADMISSIBLES.

Dans la suite, nous distinguerons les vecteurs u et v définis plus haut, des stratégies adoptées par les joueurs J^P et J^E , en désignant ces stratégies par μ et e ; μ et e sont des applications de G dans U et dans V respectivement et nous conviendrons de désigner par $\mu(x) = u$ et $e(x) = v$, les valeurs respectives de ces fonctions au point x . Notons que des fonctions de t sont des fonctions de X particulières puisque $X_n = t$.

Définition 1.1.

Nous dirons que $\mu: X \rightarrow \mu(x)$ et $e: X \rightarrow e(x)$ sont des stratégies admissibles si :

$$\left. \begin{array}{l} \mu(x) \in K^P \subseteq U \\ e(x) \in K^E \subseteq V \end{array} \right\} \quad \forall x \in G$$

où K^P et K^E sont des sous-ensembles de E^2 et E^S que nous supposerons constants.

Dans la suite, nous désignerons respectivement par $\mathcal{J}^P$ et $\mathcal{J}^E$ les ensembles de stratégies admissibles μ et e des joueurs J^P et J^E .

Définition 1.2.

Deux stratégies admissibles μ et e forment un couple stratégique admissible, $(\mu, e) \in \mathcal{J}^P \times \mathcal{J}^E$.

1.3 CIBLES.

Soit θ^P et θ^E deux ensembles de E^n , sous-ensembles de G .
 Nous supposons θ^P et θ^E fermés. Nous appellerons θ^P
 le "but" ou la "cible" du joueur J^P et θ^E le "but" ou la
 "cible" du joueur J^E .

Nous distinguerons deux cas :

cas (a) ou cas de jeu à deux cibles.

$$\theta^P \neq \emptyset \text{ et } \theta^E \neq \emptyset$$

cas (b) ou cas de jeu à une seule cible.

$$\theta^P \neq \emptyset \text{ et } \theta^E = \emptyset \quad (\text{ou } \theta^P = \emptyset \text{ et } \theta^E \neq \emptyset).$$

1.4 TEMPS DE TRANSFERT.

Nous définirons une variable τ , appelée temps de transfert,
 par les deux conditions suivantes :

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 \quad \text{et} \quad \tau(x^i) = 0 \quad \text{pour tout point } x^i \in G \quad (1.2)$$

L'équation (1.1) peut s'écrire :

$$\frac{dx}{d\tau} = f(x, u, v) \quad (1.3)$$

Dans la suite nous utiliserons parfois la variable τ ,
 de préférence à la variable t .

5 SOLUTIONS MAXIMALES - REGLES DU JEU.

Pour des stratégies $\mu \in \mathcal{S}^P$, $e \in \mathcal{S}^E$, l'équation (1.3) s'écrit :

$$\frac{dx}{d\tau} = f(x, \mu(x), e(x)) \quad (1.4)$$

on dira que l'équation (1.4) a une solution s'il existe une fonction $\phi: \tau \longrightarrow X = \phi(\tau)$ définie et continue sur un intervalle $\dot{I}_\phi$ telle que :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \text{le point } X = \phi(\tau) \in G \quad \forall \tau \in \dot{I}_\phi \\ \text{(ii)} \quad & \frac{d\phi(\tau)}{d\tau} = f(\phi(\tau), \mu(\phi(\tau)), e(\phi(\tau))) \text{ p.p.}^\dagger \quad \tau \in \dot{I}_\phi \end{aligned} \quad (1.5)$$

Soit $X^i \in G$. S'il existe une solution ϕ de l'équation (1.4) telle que :

$$0 \in \dot{I}_\phi \quad \text{et} \quad \phi(0) = X^i \quad (1.6)$$

on dit que $\phi: \tau \longrightarrow X = \phi(\tau)$ est une solution de l'équation différentielle (1.4) qui satisfait la condition initiale $\phi(0) = X^i$. On dit également que l'équation (1.4) a une solution pour le point initial X^i .

† p.p. = presque partout.

Définition 1.3

Soit $x^i \in G$. Désignons par $x : \tau \longrightarrow X = x(\tau)$,

$\tau \in [0, \tau^s)$ une solution, si elle existe, de l'équation

(1.4) pour le point initial x^i . On a $I_x = [0, \tau^s)$.

Nous dirons que x est une solution maximale^[1] de l'équation (1.4)

si :

(i) $\lim_{\substack{\tau \rightarrow \tau^s \\ \tau < \tau^s}} x(\tau)$ n'est pas définie.

ou (ii) $\lim_{\substack{\tau \rightarrow \tau^s \\ \tau < \tau^s}} x(\tau)$ est définie mais n'appartient pas à G .

ou (iii) $\lim_{\substack{\tau \rightarrow \tau^s \\ \tau < \tau^s}} x(\tau)$ est définie et appartient à G , mais il

n'existe pas de solution de l'équation (1.4) pour le point initial $x^s = \lim_{\substack{\tau \rightarrow \tau^s \\ \tau < \tau^s}} x(\tau)$.

Nous dirons que τ^s est le temps de transfert extrême

futur de la solution maximale x considérée et nous le désignerons par τ_x^+ .

Posons :

$$\sigma(x^i, \mu, e) \triangleq \left\{ x ; x \text{ est solution maximale de Eq. (1.4)} \right. \\ \left. \text{pour le point initial } x^i \right\} \quad (1.7)$$

Fonction x^i . Si étant donné $x^i \in G$, $\mu \in \mathcal{F}^\mu$, $e \in \mathcal{F}^e$, il n'existe pas de solution de l'équation (1.4) pour le point initial x^i , alors, à (x^i, μ, e) nous ferons correspondre la fonction $x^i : \tau \longrightarrow x^i(\tau)$ définie en $\tau = 0$ et nulle partout ailleurs et telle que $x^i(0) = x^i$.

Nous posons par définition :

$$\gamma(x^i, \mu, e) \triangleq \sigma(x^i, \mu, e) \cup x^i \quad (1.8)$$

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de τ , définies dans $[0, \infty)$, qui à un τ donné font correspondre un point de G , et $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ l'ensemble des parties de $\mathcal{F}$.

γ est une application de $G \times \mathcal{F}^\mu \times \mathcal{F}^e$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \cup \{x^i\}$.

D'une manière générale nous désignerons par x un élément de $\gamma(x^i, \mu, e)$ et nous poserons :

$$\left. \begin{aligned} T_x = \bar{I}_x = [0, \tau_x^+) & \quad \text{si } x \in \sigma(x^i, \mu, e) \\ T_x = 0 & \quad \text{si } x = x^i \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Nous utiliserons parfois la fonction :

$$x: t \longrightarrow x(t) \text{ telle que } x(t) = x(\tau(t)) \quad (1.10)$$

où $\tau(t)$ satisfait (1.2).

Pour un point initial x^i donné, $x_n^i = t^i$, il est clair que $\tau = t - t^i$.

Si $x \in \sigma(x^i, \mu, e)$, alors $x: t \longrightarrow x(t)$, $t \in [t^i, t_x^+)$, est une solution maximale de l'équation :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu(x), e(x)) \quad (1.11)$$

qui satisfait la condition initiale $x(t^i) = x^i$.

On a $t_x^+ = t^i + \tau_x^+$ et t_x^+ est le temps extrême futur associé à x .

Si $x = x^i$, on pose $x = x^i$. La fonction $x^i: t \longrightarrow x^i(t)$ est définie en $t = t^i$ par $x^i(t^i) = x^i$ et elle est nulle partout ailleurs.

Nous poserons ici :

$$\left. \begin{aligned} T_x &= [t^i, t_x^+) \quad \text{si} \quad x \in \sigma(x^i, \mu, e) \\ T_x &= t^i \quad \text{si} \quad x = x^i \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Définition 1.4

Nous appellerons règles du jeu les ensembles G , S^P , S^E et l'application γ .

Dans la suite, sauf s'il y a ambiguïté, nous écrirons :

X	au lieu de	$X \in G$
p	au lieu de	$p \in S^P$
e	au lieu de	$e \in S^E$
(p, e)	au lieu de	$(p, e) \in S^P \times S^E$
stratégie	au lieu de	stratégie admissible
couple stratégique	au lieu de	couple stratégique admissible

1.6 COURBES DESCRIPTIVES - TRAJECTOIRES - TRAJETS.Définition 1.5.

Etant donné les règles du jeu, soit X^i un point donné, (p, e) un couple stratégique donné. On appellera courbe descriptive une courbe $\Gamma_x (X^i, p, e)$ définie par :

$$\Gamma_x (X^i, p, e) \triangleq \left\{ x ; x = x(\tau) , \tau \in T_x , x \in \gamma(X^i, p, e) \right\} \quad (1.13)$$

Son point initial est $X^i = x(0)$. Elle est engendrée par le couple (p, e) . Notons qu'il peut exister plusieurs courbes descriptives engendrées par le même couple (p, e) , issues du même point initial X^i . Notons également que si $x = X^i$, la courbe descriptive correspondante est le point X^i .

Définition 1.6.

Soit $\Gamma_x(x^i, \mu, e)$ une courbe descriptive définie par (1.13) et soit $\tau^f \in T_x$. Posons :

$$\Gamma^{if} \triangleq \left\{ x; x \in \Gamma_x(x^i, \mu, e), x = x(\tau), \tau \in [0, \tau^f] \right\} \quad (1.14)$$

on dira que Γ^{if} est une trajectoire engendrée par (μ, e) , de point initial $x^i = x(0)$, de point final $x^f = x(\tau^f)$ et dont le support est la courbe descriptive $\Gamma_x(x^i, \mu, e)$.
Il est possible d'avoir $\tau^f = 0$.

Définition 1.7.

Pour $\tau^f \neq 0$, nous dirons qu'une trajectoire Γ^{if} définie par (1.14) est un trajet π , $\pi = \pi^f$, si :

$$x = x(\tau) \notin \theta^p \cup \theta^e \quad \forall \tau \in [0, \tau^f) \quad (1.15)$$

Si $\tau^f = 0$, nous dirons que Γ^{if} est un trajet nul π^0 .

"Raccordement" d'une trajectoire et d'une courbe descriptive.

Soit Γ^{if} une trajectoire engendrée par (μ, e) , de point initial $x^i = x(0)$, de point final $x^f = x(\tau^f)$, de support $\Gamma_x(x^i, \mu, e)$. Soit $\Gamma_{\hat{x}}(x^f, \hat{\mu}, \hat{e})$ une courbe descriptive engendrée par $(\hat{\mu}, \hat{e})$ de point initial $x^f = \hat{x}(0)$. Posons :

$$\mu'(x) = \begin{cases} \mu(x) & \text{pour } x \text{ tel que } x_n < x_n^f \\ \hat{\mu}(x) & \text{pour } x \text{ tel que } x_n \geq x_n^f \end{cases}$$

$$e'(x) = \begin{cases} e(x) & \text{pour } x \text{ tel que } x_n < x_n^j \\ \hat{e}(x) & \text{pour } x \text{ tel que } x_n \geq x_n^j \end{cases}$$

D'après la définition des stratégies admissibles (cf § 1.2) il est clair que $\mu' \in \mathcal{S}^p$ et $e' \in \mathcal{S}^E$. Si l'on pose :

$$x'(\tau) = \begin{cases} x(\tau) & \text{pour } \tau \in [0, \tau_x^j) \\ \hat{x}(\tau) & \text{pour } \tau \in [0, \tau_x^+) \end{cases}$$

on voit que $x' : \tau \longrightarrow x'(\tau)$, $\tau \in [0, \tau_{x'}^+)$ est une solution maximale de l'équation (1.4) pour le point initial x^i , avec $\tau_{x'}^+ = \tau_x^j + \tau_{\hat{x}}^+$. On a $x' \in \gamma(x^i, \mu', e')$. On dit que la trajectoire Γ^{ij} et la courbe descriptive $\Gamma_{\hat{x}}(x^j, \hat{\mu}, \hat{e})$ se raccordent au point x^j ; on obtient une courbe descriptive $\Gamma_{x'}(x^i, \mu', e')$ de point initial x^i et on a :

$$\Gamma_{x'}(x^i, \mu', e') = \Gamma^{ij} \cup \Gamma_{\hat{x}}(x^j, \hat{\mu}, \hat{e}) \quad (1.16)$$

Raccordement de deux trajectoires.

Soit Γ^{ij} une trajectoire de point initial x^i , de point final x^j et Γ^{jk} une trajectoire de point initial x^j , de point final x^k . Il est clair d'après (1.14) et (1.16) que ces deux trajectoires se raccordent et qu'on obtient une trajectoire Γ^{ik} de point initial x^i , de point final x^k .

On a :

$$\Gamma_{ij} \cup \Gamma_{jk} = \Gamma_{ik} \quad (1.17)$$

Raccordement de deux trajets.

D'après ce qui précède et d'après la définition d'un trajet, il est clair que :

$$\pi_{ij} \cup \pi_{jk} = \pi_{ik} \quad (1.18)$$

Il n'est pas exclu qu'un des trajets soit un trajet nul π^o .

1.7 COUPLES STRATEGIQUES FAIBLEMENT ET FORTEMENT JOUABLES.

Définition 1.8.

Etant donné les règles du jeu, on appellera partie l'évolution de l'état du jeu $X = X(\tau)$ le long d'un trajet π .

Une partie est donc associée à la donnée d'un point initial X^i et d'un couple (μ, e) .

On dira qu'une partie se termine si le point final de π , $X^f = X(\tau^f) \in \theta^P \cup \theta^E$. On entendra par état initial et état final d'une partie, le point initial et le point final du trajet correspondant. On dira qu'une partie est engendrée par un couple stratégique (μ, e) , si le trajet π correspondant est engendré par (μ, e) .

Définitions 1.9.

1 - Cas (a) (cf. § 1.3). On dit qu'un couple stratégique (μ, e) est faiblement jouable, ou jouable, pour le joueur J^P en X^i si, pour le point initial X^i , (μ, e) engendre une partie qui se termine et dont l'état final $X^f \in \theta^P$.

Un couple stratégique (μ, e) est faiblement jouable, ou jouable, pour le joueur J^E en X^i si, pour le point initial X^i , (μ, e) engendre une partie qui se termine et dont l'état final $X^f \in \theta^E$.

2 - Cas (b). La définition d'un couple stratégique faiblement jouable, ou jouable, pour J^P en X^i est la même que dans le cas (a). On dit qu'un couple stratégique (μ, e) est faiblement jouable, ou jouable, pour J^E en X^i s'il n'est pas faiblement jouable pour J^P en X^i .

Désignons par $\mathcal{C}^P(X^i)$ et $\mathcal{C}^E(X^i)$ les sous-ensembles de $\mathcal{J}^P \times \mathcal{J}^E$ de couples stratégiques faiblement jouables en X^i pour J^P et pour J^E respectivement. Nous avons, d'après les définitions précédentes :

1 - dans le cas (a) :

$$(\mu, e) \in \mathcal{C}^P(X^i) \implies \exists x \in \gamma(X^i, \mu, e) \text{ telle que} \\ \Gamma_x(X^i, \mu, e) \cap \theta^P \neq \emptyset \quad (1.19)$$

$$(\mu, e) \in \mathcal{C}^E(x^i) \implies \exists x \in \gamma(x^i, \mu, e) \quad \text{telle que}$$

$$\Gamma_x(x^i, \mu, e) \cap \theta^E \neq \emptyset \quad (1.20)$$

2 - dans le cas (b) :

$$(\mu, e) \in \mathcal{C}^P(x^i) \iff \exists x \in \gamma(x^i, \mu, e) \quad \text{telle que}$$

$$\Gamma_x(x^i, \mu, e) \cap \theta^P \neq \emptyset \quad (1.21)$$

$$(\mu, e) \in \mathcal{C}^E(x^i) \iff \forall x \in \gamma(x^i, \mu, e), \Gamma_x(x^i, \mu, e) \cap \theta^P = \emptyset \quad (1.22)$$

Définitions 1.10.

1 - Cas (a). Un couple stratégique (μ, e) est fortement jouable pour le joueur J^P en X^i , si :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i) il n'est pas faiblement jouable pour } J^E \text{ en } X^i \\ \text{(ii) } \Gamma_x(x^i, \mu, e) \cap \theta^P \neq \emptyset \quad \forall x \in \gamma(x^i, \mu, e) \end{array} \right\} \quad (1.23)$$

Un couple stratégique (μ, e) est fortement jouable pour le joueur J^E en X^i , si :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)' il n'est pas faiblement jouable pour } J^P \text{ en } X^i \\ \text{(ii)' } \Gamma_x(x^i, \mu, e) \cap \theta^E \neq \emptyset \quad \forall x \in \gamma(x^i, \mu, e) \end{array} \right\} \quad (1.24)$$

2 - Cas (b). Un couple stratégique (μ, e) est fortement jouable pour le joueur J^P en X^i si :

$$\Gamma_x(x^i, \mu, e) \cap \theta^P \neq \emptyset \quad \forall x \in \gamma(x^i, \mu, e) \quad (1.25)$$

Un couple stratégique (μ, e) est fortement jouable pour le joueur J^E en X^i si :

$$\Gamma_x(x^i, \mu, e) \cap \theta^E = \emptyset \quad \forall x \in \gamma(x^i, \mu, e) \quad (1.26)$$

Désignons par $\overset{*}{\mathcal{C}}^P(x^i)$ et $\overset{*}{\mathcal{C}}^E(x^i)$ les sous-ensembles de $\mathcal{F}^P \times \mathcal{F}^E$ de couples stratégiques fortement jouables en X^i pour J^P et J^E respectivement. Il est clair, d'après (1.19)-(1.26) que :

1 - dans le cas (a) :

$$\left. \begin{array}{ll} \overset{*}{\mathcal{C}}^P(x^i) \subseteq \mathcal{C}^P(x^i) & \text{et} \quad \overset{*}{\mathcal{C}}^P(x^i) \cap \mathcal{C}^E(x^i) = \emptyset \\ \overset{*}{\mathcal{C}}^E(x^i) \subseteq \mathcal{C}^E(x^i) & \text{et} \quad \overset{*}{\mathcal{C}}^E(x^i) \cap \mathcal{C}^P(x^i) = \emptyset \end{array} \right\} \quad (1.27)$$

2 - dans le cas (b) :

$$\left. \begin{array}{ll} \overset{*}{\mathcal{C}}^P(x^i) \subseteq \mathcal{C}^P(x^i) & \text{et} \quad \overset{*}{\mathcal{C}}^P(x^i) \cap \mathcal{C}^E(x^i) = \emptyset \\ \overset{*}{\mathcal{C}}^E(x^i) = \mathcal{C}^E(x^i) & \text{et} \quad \mathcal{C}^E(x^i) \cap \mathcal{C}^P(x^i) = \emptyset \end{array} \right\} \quad (1.28)$$

1.8 OBJECTIFS DU JEU.

Définition 1.11.

Les objectifs du jeu sont définis par la donnée des (ou de la) cibles et d'une prescription pour chaque joueur.

Dans les cas (a), la prescription pour le joueur J^P est :

pour un point initial X^i quelconque, utiliser une stratégie μ telle que, quelle que soit la stratégie e de J^E , la partie engendrée se termine et que son état final appartienne à Θ^P .

La prescription de J^E est : pour un point initial X^i quelconque, utiliser une stratégie e telle que, quelle que soit la stratégie μ de J^P , la partie engendrée se termine et que son état final appartienne à Θ^E .

Dans le cas (b), la prescription de J^P est la même que dans le cas (a), celle de J^E est : pour un point initial X^i quelconque, utiliser une stratégie e telle que, quelle que soit la stratégie μ de J^P , la partie engendrée n'amène pas l'état du jeu dans Θ^P .

Un jeu est défini par ses règles et ses objectifs.

1.9 ENSEMBLES A_e ET B_μ , A ET B , α ET β . CARTE DU JEU.

Etant donné une stratégie, nous lui ferons correspondre l'ensemble de points suivant : $A_e \subseteq G$;

$$A_e \triangleq \left\{ X^i : \exists \mu, (\mu, e) \in \mathcal{C}^P(X^i) \right\} \quad (1.29)$$

De même, étant donné une stratégie μ , nous lui ferons correspondre l'ensemble $B_\mu \subseteq G$, défini par :

$$B_\mu \triangleq \left\{ x^i : \exists e, (\mu, e) \in \mathcal{C}^E(x^i) \right\} \quad (1.30)$$

A partir de ces ensembles A_e et B_μ , nous définirons les ensembles suivants :

$$\begin{array}{lll} A \text{ et } B & A \triangleq \bigcap_e A_e & B \triangleq \bigcap_\mu B_\mu \\ \mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B} & \mathcal{A} \triangleq \bigcup_e A_e & \mathcal{B} \triangleq \bigcup_\mu B_\mu \end{array}$$

Il est clair que l'on a :

$$A = \left\{ x^i : \forall e \quad \exists \mu, (\mu, e) \in \mathcal{C}^P(x^i) \right\} \quad (1.31)$$

$$B = \left\{ x^i : \forall \mu \quad \exists e, (\mu, e) \in \mathcal{C}^E(x^i) \right\} \quad (1.32)$$

$$\mathcal{A} = \left\{ x^i : \exists e \quad \exists \mu, (\mu, e) \in \mathcal{C}^P(x^i) \right\} \quad (1.33)$$

$$\mathcal{B} = \left\{ x^i : \exists \mu \quad \exists e, (\mu, e) \in \mathcal{C}^E(x^i) \right\} \quad (1.34)$$

$$\text{comp}_\mu A = \left\{ x^i : \exists e \quad \forall \mu, (\mu, e) \notin \mathcal{C}^P(x^i) \right\} \quad (1.35)$$

$$\text{comp}_\mu B = \left\{ x^i : \exists \mu \quad \forall e, (\mu, e) \notin \mathcal{C}^E(x^i) \right\} \quad (1.36)$$

$$\text{comp } \mathcal{A} = \left\{ x^i : \forall e \quad \forall \mu, (\mu, e) \notin \mathcal{C}^P(x^i) \right\} \quad (1.37)$$

$$\text{comp } \mathcal{B} = \left\{ x^i : \forall \mu \quad \forall e, (\mu, e) \notin \mathcal{C}^E(x^i) \right\} \quad (1.38)$$

Remarque :

Dans le cas (b) d'un jeu à une seule cible nous avons
(cf. (1.28)) :

$$(h, e) \in \mathcal{C}^P(x^i) \iff (h, e) \notin \mathcal{C}^E(x^i) \text{ et } (h, e) \in \mathcal{C}^E(x^i) \iff (h, e) \notin \mathcal{C}^P(x^i)$$

(1.35) et (1.36) s'écrivent alors :

$$\text{comp } A = \{ x^i : \exists e \quad \forall h, (h, e) \in \mathcal{C}^E(x^i) \} \quad (1.39)$$

$$\text{comp } B = \{ x^i : \exists h \quad \forall e, (h, e) \in \mathcal{C}^P(x^i) \} \quad (1.40)$$

et l'on voit que :

$$\text{comp } A \subseteq B \quad (1.41)$$

$$\text{comp } B \subseteq A \quad (1.42)$$

d'où il ressort que dans les jeux à une seule cible :

$$\text{comp } A \cap \text{comp } B = \emptyset \quad (1.43)$$

Dans un jeu à une seule cible ($\theta^P \neq \emptyset$ et $\theta^E = \emptyset$), on a nécessairement $A \neq \emptyset$ car $A \supseteq \theta^P$. Si $B \neq \emptyset$, on a en général $A \cap B = \emptyset$.

si $A \cap B = \phi$, alors

$$A \subseteq \text{comp } B \quad (1.44)$$

$$B \subseteq \text{comp } A \quad (1.45)$$

et d'après (1.41) et (1.42), on a dans ce cas :

$$A = \text{comp } B \quad (1.46)$$

$$B = \text{comp } A \quad (1.46)'$$

Carte du jeu. Nous dirons que les ensembles A, B, A, B , $\text{comp } A, \text{comp } B, \text{comp } A, \text{comp } B$ et les intersections $A \cap B, A \cap B, \text{comp } A \cap \text{comp } B$ et $\text{comp } A \cap \text{comp } B$ forment la carte du jeu.

1.10 LEMME 1.1.

Dans ce paragraphe nous utiliserons la variable t et représenterons des courbes descriptives, des trajectoires et des trajets par des fonctions $x: t \longrightarrow x(t)$, solutions de l'équation (1.11). (cf. (1.10)-(1.12) dans § 1.5).

Lemme 1.1. Soient $x' = x(t')$ et $x'' = x(t'')$, $t' < t''$,
 | deux points d'un trajet π , de point initial x^i ,
 | engendré par (γ, e) .

$$\left| \begin{array}{ll} \underline{\text{Si}} & X' \in \text{comp } A_e \\ \underline{\text{Si}} & X' \in \text{comp } B_r \end{array} \right. \quad \underline{\text{alors}} \quad X'' \notin A_e \quad \text{et} \quad X'' \notin B_r$$

Démonstration.

Supposons que $\theta^p \neq \emptyset$, la cible θ^e pouvant être vide ou non (cas (a) et (b)).

Considérons le trajet[†] π' , $\pi' \in \pi$, de point initial $X' = x(t')$ et de point final $X'' = x(t'')$. Par hypothèse $X' \in \text{comp } A_e$, supposons que $X'' \in A_e$.

D'après la définition d'un trajet (définition (1.5)) on a :

$$x(t) \notin \theta^p \cup \theta^e \quad \forall t \in [t', t'')$$

D'après la définition de A_e , si $X'' \in A_e$, alors :
 $\exists r''$ telle que $(r'', e) \in \mathcal{C}^p(x'')$.

Désignons par π'' un trajet de point initial X'' , engendré par (r'', e) et soit : $x'' : t \longrightarrow x''(t)$, la fonction correspondante, solution de l'équation (1.11).

[†] Il est clair, d'après la définition d'un trajet, que π' est un trajet.

D'autre part, d'après la définition d'un couple stratégique jouable pour J^P en X'' , il existe un instant $t^{\dagger}$, $t^{\dagger} \in [t'', t_{x''}^+)^{\dagger}$, tel que :

$$x''(t^{\dagger}) \in \theta^P \quad \text{et} \quad x''(t) \notin \theta^P \cup \theta^E \quad \forall t \in [t'', t^{\dagger}).$$

Appelons $x^{\dagger} = x''(t^{\dagger})$ le point final du trajet π'' .

Soit $h''' : X \longrightarrow h'''(x)$ telle que :

$$h'''(x) = \begin{cases} h(x) & \text{pour } x \text{ tel que } x_n < t'' \\ h''(x) & \text{pour } x \text{ tel que } x_n \geq t'' \end{cases}$$

Soit $x''' : t \longrightarrow x'''(t)$, $t \in [t', t^{\dagger}]$, telle que :

$$x'''(t) = \begin{cases} x(t) & \text{pour } t \in [t', t'') \\ x''(t) & \text{pour } t \in [t'', t^{\dagger}] \end{cases}$$

Il est clair que $h''' \in \mathcal{F}^P$ et que x''' définie sur $[t', t^{\dagger}]$ est solution de l'équation :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, h'''(x), e(x))$$

pour le point initial x' .

$\dagger$ où $t_{x''}^+$ est ici le temps extrême futur associé à x'' .

on a :

$$x'''(t^+) \in \theta^p \quad \text{et} \quad x'''(t) \notin \theta^p \cup \theta^e \quad \forall t \in [t', t^+).$$

Par suite $(\mu''', e) \in \mathcal{C}^p(x')$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse $x' \in \text{comp } A_e$. Donc $x'' \notin A_e$ et la première partie du lemme est démontrée.

Pour démontrer la seconde partie du lemme, nous supposerons que $x'' \in B_\mu$. Par hypothèse $x' \in \text{comp } B_\mu$. D'après la définition d'un trajet :

$$x(t) \notin \theta^p \cup \theta^e \quad \forall t \in [t', t'').$$

D'après la définition de B_μ , si $x'' \in B_\mu$, alors $\exists e''$ telle que $(\mu, e'') \in \mathcal{C}^e(x'')$.

Nous désignerons par π'' un trajet de point initial x'' , engendré par (μ, e'') , et par $x'' : t \longmapsto x''(t)$, la fonction correspondante, solution de l'équation (1.11).

Nous examinerons séparément les cas (a) et (b).

cas (a) : dans ce cas la démonstration est la même que celle que nous avons donnée ci-dessus pour les ensembles A_e et nous pouvons conclure que $x'' \notin B_\mu$.

cas (b) : d'après la définition d'un couple stratégique jouable pour J^e en x'' , nous avons dans ce cas :

$$x''(t) \notin \theta^p \quad \forall t \in [t'', t_{x''}^+).$$

Comme dans la première démonstration relative aux ensembles A_e , par une définition analogue à celle du couple stratégique (μ, e) , on peut définir ici un couple stratégique (μ, e''') et une fonction $x''': t \longrightarrow x'''(t)$, $t \in [t', t_{x'''}^+)$ (où $t_{x'''}^+ = t_{x''}^+$), solution de l'équation :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu(x), e'''(x))$$

pour le point initial x' .

Nous avons :

$$x'''(t) \notin \theta^r \quad \forall t \in [t', t_{x'''}^+).$$

Par suite $(\mu, e''') \in \mathcal{C}^e(x')$ ce qui est incompatible avec l'hypothèse $x' \in \text{comp } B_\mu$. Donc $x'' \notin B_\mu$ et la deuxième partie du lemme est démontrée.

La démonstration est la même dans le cas où $\theta^r = \emptyset$ et $\theta^e \neq \emptyset$. Le lemme 1.1 est démontré.

1.11 LEMME 1.2.

Considérons maintenant les frontières ∂A_e et ∂B_μ des ensembles A_e et B_μ . Nous allons démontrer le lemme suivant :

Lemme 1.2. Soit π un trajet de point initial x^i , engendré par (μ, e) , de support $\Gamma_x(x^i, \mu, e)$. Soit $x' = x(\tau')$ et $x'' = x(\tau'')$, $\tau' < \tau''$, deux points de π ,

Si pour tout point $X = x(\tau)$, $\tau \in [\tau', \tau'']$, de π
il existe un voisinage de X sur lequel $\vdash$ et e
sont de classe C^1 ,

alors, $x' \in \partial A_e \implies x'' \notin \overset{\circ}{A}_e$
 $x' \in \partial B_\mu \implies x'' \notin \overset{\circ}{B}_\mu$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que le lemme 1.2 se déduit facilement du lemme 1.1 dans le cas où $x' \in \text{comp } A_e$, (ou $x' \in \text{comp } B_\mu$), x' étant un point de la frontière de A_e (ou de B_μ). Nous étudierons donc le cas où $x' \in A_e$ (ou $x' \in B_\mu$).

D'après la définition d'un trajet, l'ensemble de points :

$$\{X : X = x(\tau), \tau \in [\tau', \tau'']\} \subset \pi$$

est aussi un trajet. Posons :

$$\pi' = \{X : X = x(\tau), \tau \in [\tau', \tau'']\} = \{X : X = x'(\tau), \tau \in [0, \tau'' - \tau']\}$$

où $x' \in \gamma(x', \mu, e)$.

Par hypothèse $x' \in \partial A_e$. D'autre part, x' étant point intérieur de G , on peut trouver une boule ouverte $B(x')$ de centre x' et de rayon ρ telle que $B(x') \subset G$.

Un point de $B(x')$ appartiendra soit à A_e soit à $\text{comp } A_e$. Supposons que l'on puisse avoir $B(x') \cap \text{comp } A_e = \emptyset$. Cela signifie que $B(x') \subseteq A_e$, c'est-à-dire $x' \in \overset{\circ}{A}_e$, ce qui est contraire à l'hypothèse $x' \in \partial A_e$. Donc :

$$B(x') \cap \text{comp } A_e \neq \emptyset.$$

Dans le cas étudié ici où $x' \in A_e$, on a $x' \notin \text{comp } A_e$, donc $x' \notin B(x') \cap \text{comp } A_e$. On peut alors trouver un point différent de x' , soit $x' + \varepsilon \eta'$, qui appartient à $B(x') \cap \text{comp } A_e$.

Soit $\Gamma_{\hat{x}'}(x' + \varepsilon \eta', \tau, e)$ une courbe descriptive de point initial $x' + \varepsilon \eta'$, engendrée par (τ, e) . On a : $\hat{x}' \in \gamma(x' + \varepsilon \eta', \tau, e)$.

Comme en tout point $X = x'(\tau)$, $\tau \in [0, \tau'' - \tau']$, du trajet $\pi' \subseteq \pi$, il existe un voisinage sur lequel τ et e sont de classe C^1 , pour un ε suffisamment petit, $\hat{x}'$ est une solution de l'équation (1.4) pour le point initial $x' + \varepsilon \eta'$. Et pour $\tau \in [0, \tau'' - \tau']$ on a :

$$\hat{x}'(\tau) = x'(\tau) + \varepsilon \hat{\eta}(\tau) + o(\varepsilon, \tau) \quad (1.47)$$

où $\frac{\|o(\varepsilon, \tau)\|}{\varepsilon} \rightarrow 0$ uniformément pour tout $\tau \in [0, \tau'' - \tau']$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$

et où $\hat{\eta} : \tau \longrightarrow \hat{\eta}(\tau)$, $\tau \in [0, \tau'' - \tau']$ est solution de l'équation :

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial e}{\partial x} \right) \Big|_{x=x'(\tau)} \cdot \eta \quad (1.48)$$

vérifiant la condition initiale $\hat{\eta}(0) = \eta'$.

D'après la définition d'un trajet (cf. définition 1.7) :

$$x = x'(\tau) \notin \theta^P \cup \theta^E \quad \forall \tau \in [0, \tau'' - \tau'] .$$

D'autre part, les (ou la) cibles θ^P et θ^E étant des ensembles fermés, $\theta^P \cup \theta^E$ est fermé. Donc pour tout $x = x'(\tau)$, $\tau \in [0, \tau'' - \tau']$, il existe un voisinage $B(x'(\tau))$ tel que :

$$B(x'(\tau)) \cap (\theta^P \cup \theta^E) = \emptyset \quad (1.49)$$

et si ε est choisi suffisamment petit, on a :

$$\hat{x}'(\tau) \notin \theta^P \cup \theta^E \quad \forall \tau \in [0, \tau'' - \tau'] .$$

Par suite la trajectoire définie par :

$$\left\{ x : x \in \Gamma_{\hat{x}'}(x' + \varepsilon \eta', \tau, e), x = \hat{x}'(\tau), \tau \in [0, \tau'' - \tau'] \right\}$$

est un trajet que nous désignerons par $\hat{\pi}'$.

Supposons maintenant qu'il existe $\tau''' \in [0, \tau'' - \tau']$ tel que $x''' = x'(\tau''')$ $\in \overset{\circ}{A}_e$. Soit $B(x'(\tau''')) \subset \overset{\circ}{A}_e$ un voisinage de x''' qui vérifie (1.49). Pour un ε suffisamment petit, on a d'après (1.47) :

$$\hat{x}'(\tau''') = x''' + \varepsilon \hat{\eta}(\tau''') + o(\varepsilon, \tau''') \in B(x'(\tau''')) \subset \overset{\circ}{A}_e \quad (1.50)$$

Or, d'après le lemme 1.1 :

$$\hat{x}'(0) = x' + \varepsilon \eta' \notin \text{comp } A_e \implies \hat{x}'(\tau''') \notin A_e$$

et à fortiori : $\hat{x}'(\tau''') \notin \overset{\circ}{A}_e$, ce qui contredit (1.50).

Donc il n'existe pas de $\tau''' \in [0, \tau'' - \tau']$ tel que

$x''' = x'(\tau''') \in \overset{\circ}{A}_e$. Par continuité à gauche de la fonction $x' : \tau \longrightarrow x'(\tau)$ en $\tau'' - \tau'$, on a $x'' = x'(\tau'' - \tau') \notin \overset{\circ}{A}_e$.

Soit finalement :

$$x'(\tau) \notin \overset{\circ}{A}_e \quad \forall \tau \in [0, \tau'' - \tau']$$

et la première partie du lemme est démontrée.

La démonstration de la seconde partie est identique.

1.12 COROLLAIRE 1.1.

Des lemmes 1.1 et 1.2, on déduit le corollaire suivant :

Corollaire 1.1. Soit π un trajet de point initial x^i , engendré par (γ, e) , de support $\Gamma_x(x^i, \gamma, e)$. Supposons que pour tout point de π , il existe un voisinage sur lequel γ et e sont de classe C^1 . Si $\theta^r \neq \phi$ et si $x^i \in \partial A_e$, s'il existe un temps de transfert $\tau^f > 0$, tel que $x(\tau^f) \in \theta^r$ alors $x(\tau) \in \partial A_e$ pour tout $\tau \in [0, \tau^f]$. Si $\theta^e \neq \phi$ et si $x^i \in \partial B_\gamma$, s'il existe un temps de transfert $\tau^f > 0$, tel que $x(\tau^f) \in \theta^e$ alors $x(\tau) \in \partial B_\gamma$ pour tout $\tau \in [0, \tau^f]$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que $\theta^r \subset A_e$ et $\theta^e \subset B_\gamma$. Plaçons nous dans le cas où $\theta^r \neq \phi$ et $x^i \in \partial A_e$. D'après le lemme 1.2, nous avons :

$$x(\tau) \notin \overset{\circ}{A}_e \quad \forall \tau \in [0, \tau^f] \quad (1.51)$$

$$x(\tau) \in \overline{\text{comp } A_e} \quad \forall \tau \in [0, \tau^f] \quad (1.51)'$$

D'autre part, si il existait un τ , $\tau \in (0, \tau^f)$, tel que $x(\tau) \in \overset{\circ}{\text{comp } A_e}$, on pourrait affirmer d'après le lemme 1.1, que $x(\tau^f) \notin A_e$. A fortiori on aurait $x(\tau^f) \notin \theta^r$, ce qui est contraire à l'hypothèse $x(\tau^f) \in \theta^r$. Donc :

$$x(\tau) \notin \overset{\circ}{\text{comp } A_e} \quad \forall \tau \in (0, \tau^f)$$

Comme $x^i \in \partial A_e$, on a $x^i \notin \overline{\text{comp } A_e}$ et finalement :

$$x(\tau) \notin \overline{\text{comp } A_e} \quad \forall \tau \in [0, \tau^+] \quad (1.52)$$

De (1.51) et (1.52) on déduit :

$$x(\tau) \in \overline{A_e} \cap \overline{\text{comp } A_e} \quad \forall \tau \in [0, \tau^+]$$

c'est-à-dire :

$$x(\tau) \in \partial A_e \quad \forall \tau \in [0, \tau^+]$$

D'autre part :

$$x(\tau^+) \in \partial^p \subseteq A_e \subseteq \overline{A_e}$$

et d'après (1.51)' :

$$x(\tau^+) \in \overline{\text{comp } A_e}$$

de sorte que :

$$x(\tau) \in \partial A_e \quad \forall \tau \in [0, \tau^+]$$

et la première partie du corollaire est démontrée.

La démonstration de la seconde partie est identique.

1.13 1ère HYPOTHESE FONDAMENTALE.

Nous ferons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1.1. Si x^i est un point de la frontière ∂A de A (ou ∂B de B), alors il existe une stratégie e_{x^i} (ou f_{x^i}) telle que x^i appartient à la frontière $\partial A_{e_{x^i}}$ de $A_{e_{x^i}}$ (ou $\partial B_{f_{x^i}}$ de $B_{f_{x^i}}$).

1.14 STRATEGIES PURES. HYPOTHESE DE JEU PARTICULIERE, $A = \text{comp } B$.

Nous introduirons ici une nouvelle notion qui est celle de stratégie "pure".

Définition. Etant donné un point x^i , nous dirons que $\bar{f}$ est une stratégie pure pour le joueur J^P en x^i , si quelle que soit la stratégie e du joueur J^E , $(\bar{f}, e)$ est un couple stratégique jouable pour J^P au point x^i .

De même, étant donné un point x^i , nous dirons que $\bar{e}$ est une stratégie pure pour le joueur J^E en x^i , si quelle que soit la stratégie f du joueur J^P , $(f, \bar{e})$ est un couple stratégique jouable pour J^E au point x^i .

Désignons par Q^P et Q^E respectivement, les ensembles de points initiaux x^i , tels qu'en x^i il existe une stratégie pure $\bar{f}$ pour J^P , $\bar{e}$ pour J^E . On a :

$$Q^P \triangleq \left\{ x^i ; \exists \bar{f} \quad \forall e, (\bar{f}, e) \in \mathcal{C}^P(x^i) \right\} \quad (1.53)$$

$$Q^E \triangleq \left\{ x^i ; \exists \bar{e} \quad \forall f, (f, \bar{e}) \in \mathcal{C}^E(x^i) \right\} \quad (1.54)$$

Notons que dans un jeu à deux cibles, ni l'un ni l'autre de ces ensembles n'est vide car d'après la définition même

$Q^P \supseteq \emptyset^P$ et $Q^E \supseteq \emptyset^E$. Dans un jeu à une seule cible, un au moins de ces ensembles n'est pas vide.

D'après les définitions des ensembles A et B (§ 1.9) il est clair que :

$$Q^P \subseteq A \quad (1.55)$$

$$Q^E \subseteq B \quad (1.56)$$

Cas particulier : Plaçons nous dans le cas d'un jeu où :

$$\left. \begin{aligned} (p, e) \notin \mathcal{C}^P(x^i) &\implies (p, e) \in \mathcal{C}^E(x^i) \\ (p, e) \notin \mathcal{C}^E(x^i) &\implies (p, e) \in \mathcal{C}^P(x^i) \end{aligned} \right\} \quad (1.57)$$

En revenant aux définitions de $\text{comp } A$ et $\text{comp } B$ (§ 1.9) on a immédiatement :

$$\text{comp } A = \{x^i; \exists e \quad \forall p, (p, e) \in \mathcal{C}^E(x^i)\} \quad (1.58)$$

$$\text{comp } B = \{x^i; \exists p \quad \forall e, (p, e) \in \mathcal{C}^P(x^i)\} \quad (1.59)$$

En comparant (1.58), (1.59) et (1.53), (1.54) et en revenant aux définitions de A et B, on voit que :

$$Q^P = \text{comp } B \subseteq A \quad (1.60)$$

$$Q^E = \text{comp } A \subseteq B \quad (1.61)$$

Ce cas particulier est toujours réalisé dans les jeux à une seule cible (cf § 1.9. Remarque); alors (1.58) et (1.59) ne sont autres que (1.39) et (1.40).

Si les hypothèses (1.57) sont vérifiées et si $A \cap B = \emptyset$ alors, d'après (1.60) et (1.61) on a immédiatement :

$$A = \text{comp } B \quad (1.62)$$

et par suite :

$$\partial A = \partial B \triangleq F \quad (1.63)$$

Dans la suite de cette première partie, nous supposons que les ensembles A et B sont liés par la relation (1.62).

.15 TRAJETS APPARTENANT A LA FRONTIERE F. LEMME 1.3.

Dans le cas où $A = \text{comp } B$, nous allons démontrer deux lemmes qui nous permettront d'établir un théorème de Minimax.

Lemme 1.3. Soit $A = \text{comp } B$ et $F \triangleq \partial A = \partial B$.

Soit $x_i \in F \cap G$ et μ_{x_i} et e_{x_i} des stratégies associées à x_i par l'hypothèse 1.1. Soit π un trajet

de point initial x^i , engendré par (μ_{x^i}, e_{x^i}) ,
de support $\Gamma_x(x^i, \mu_{x^i}, e_{x^i})$.

Hypothèse 1.2 : Si pour tout point de π , on peut trou-
ver un voisinage de ce point sur lequel μ_{x^i} et e_{x^i}
sont de classe C^1 ,

alors π appartient à F .

Démonstration : D'après l'hypothèse 1.1 et la condition (1.62),
on a :

$$x^i \in F \implies \begin{cases} x^i \in \partial A_{e_{x^i}} \\ x^i \in \partial B_{\mu_{x^i}} \end{cases}$$

D'après le lemme 1.2 :

$$\pi \cap \overset{\circ}{A}_{e_{x^i}} = \emptyset$$

$$\pi \cap \overset{\circ}{B}_{\mu_{x^i}} = \emptyset$$

D'autre part :

$$A \subseteq A_{e_{x^i}} \implies \overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{A}_{e_{x^i}}$$

$$B \subseteq B_{\mu_{x^i}} \implies \overset{\circ}{B} \subseteq \overset{\circ}{B}_{\mu_{x^i}}$$

d'où l'on tire :

$$\pi \cap \overset{\circ}{A} = \phi$$

$$\pi \cap \overset{\circ}{B} = \phi$$

c'est-à-dire :

$$\pi \subset \overline{\text{comp } A} \cap \overline{\text{comp } B}$$

Soit en tenant compte de la condition (1.62) :

$$\pi \subset F \quad (1.64)$$

π est appelé F-trajet et désigné par π_F .

1.16 AUTRES PROPRIETES DES F-TRAJETS.

De $\pi_F \cap \overset{\circ}{A}_{exi} = \phi$ et $\pi_F \cap \overset{\circ}{B}_{pxi} = \phi$, nous déduisons :

$$\pi_F \subset \overline{\text{comp } A_{exi}} \quad (1.65)$$

$$\pi_F \subset \overline{\text{comp } B_{pxi}} \quad (1.66)$$

Comme $\text{comp } B_{pxi} \subset \text{comp } B$, $\text{comp } B = A$ et $A \subseteq A_{exi}$, nous tirons de (1.66) :

$$\pi_F \subset \overline{A_{exi}}$$

Ce qui avec (1.65) nous donne :

$$\pi_F \subset \overline{A_{e_{x_i}}} \cap \overline{\text{comp } A_{e_{x_i}}} \quad (1.67)$$

c'est-à-dire :

$$\pi_F \subset \partial A_{e_{x_i}} \quad (1.67)'$$

on obtiendrait de même :

$$\pi_F \subset \overline{B_{\mu_{x_i}}} \cap \overline{\text{comp } B_{\mu_{x_i}}} \quad (1.68)$$

c'est-à-dire :

$$\pi_F \subset \partial B_{\mu_{x_i}} \quad (1.68)'$$

1.17 PROPRIETES DE DEUX FAMILLES DE TRAJETS.

Rappelons que :

$$\pi_F \subset \begin{cases} \partial A = \partial B = F & (1.64) \\ \partial A_{e_{x_i}} & (1.67)' \\ \partial B_{\mu_{x_i}} & (1.68)' \end{cases}$$

et que pour tout point X' du trajet π_F , on peut trouver une boule ouverte $B(X')$ sur laquelle μ_{x_i} et e_{x_i} sont de

classe C^1 . Comme tous les points de π_F sont points intérieurs de G , on peut choisir $B(x')$ de façon que $B(x') \subset G$.

Soit $x' \in \pi_F$, $x'' \in B(x') \cap \partial A_{e_{x'}}$. Supposons $x'' \notin \theta^p \cup \theta^F$.

Soit $\mu: X \longrightarrow \mu(x)$, une stratégie constante que nous désignerons par $\alpha: X \longrightarrow \alpha(x)$, telle que :

$$\mu(x) = \alpha(x) = u^b \quad \forall x \quad (1.69)$$

u^b est un vecteur constant quelconque appartenant à K^p .

Soit π_α , un trajet de point initial x'' , engendré par $(\alpha, e_{x'})$. Les stratégies α et $e_{x'}$ étant de classe C^1 sur $B(x')$, il existe des trajets π_α qui ne sont pas des trajets nuls.

D'après le lemme 1.2 :

$$\pi_\alpha \cap \overset{\circ}{A}_{x'} \cap B(x') = \emptyset$$

d'où nous tirons :

$$(a) \quad \pi_\alpha \cap B(x') \subset \overline{\text{comp}_\mu A_{e_{x'}}} \subseteq \overline{\text{comp}_\mu A} \quad \forall u^b \in K^p$$

Comme $\text{comp}_\mu A = B$, on peut encore écrire (a) sous la forme :

$$(a)' \quad \pi_\alpha \cap B(x') \subset \overline{B} \subseteq \overline{B_{\mu_{x'}}} \quad \forall u^b \in K^p$$

De même considérons un point $x''' \in B(x') \cap \partial B_{\mu_{x_i}}$, $x''' \notin \theta^p \cup \theta^e$,
 et soit $e: X \longrightarrow e(x)$ une stratégie constante que nous
 désignerons par $\beta: X \longrightarrow \beta(x)$ telle que :

$$e(x) = \beta(x) = v^b \quad \forall x \quad (1.70)$$

v^b est un vecteur constant quelconque appartenant à K^E .

Soit π_β un trajet de point initial x''' , engendré
 par (μ_{x_i}, β) .

D'après le lemme 1.2 :

$$\pi_\beta \cap \overset{\circ}{B}_{\mu_{x_i}} \cap B(x') = \emptyset$$

d'où nous tirons :

$$(b) \quad \pi_\beta \cap B(x') \subset \overline{\text{comp } B_{\mu_{x_i}}} \subset \overline{\text{comp } B} \quad \forall v^b \in K^E$$

comme $\text{comp } B = A$, on peut écrire (b) sous la forme :

$$(b)' \quad \pi_\beta \cap B(x') \subset \overline{A} \subset \overline{A_{e_{x_i}}} \quad \forall v^b \in K^E$$

Il est clair que ces propriétés (a), (a)', (b), (b)', sont
 vraies dans le cas particulier où $x' = x'' = x'''$.

1.18 LEMME 1.4.

Dans les paragraphes suivants de ce chapitre, nous supposons

que : Hypothèse 1.3. :

- (i) on peut représenter analytiquement la frontière F des ensembles A et B par l'équation :

$$g(x) = 0$$

- (ii) pour tout point $x' \in \pi_F$, $x' \notin \theta^p \cup \theta^e$, on peut trouver un voisinage $B(x')$ de ce point sur lequel la fonction $g: X \rightarrow g(x)$ est de classe C^1 et $\text{grad } g(x)$ est défini et différent de zéro ;

- (iii) de plus :

$$g(x) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in \overline{A} \cap B(x')$$

$$g(x) \leq 0 \quad \text{pour tout } x \in \overline{B} \cap B(x')$$

Supposons que $x' \notin \theta^p \cup \theta^e$, $x' \in \pi_F$, et appliquons la propriété (a)' du paragraphe précédent à un trajet π_α de point initial $x'' = x'$, engendré par $(\alpha, e_{x'})$ où $\alpha: X \rightarrow \alpha(x)$ est définie par (1.69). On prendra pour $B(x')$ un voisinage du point x' sur lequel $\gamma_{x'}$ et $e_{x'}$ sont de classe C^1 et où (ii) ci-dessus est vérifiée. Dans le voisinage $B(x')$, le point courant de π_α sera représenté par :

$$x_\alpha(t) = x' + \Delta x_\alpha(t) \quad \text{où } \Delta x_\alpha(t') = 0, x_\alpha(t') = x', t \geq t'$$

et où $\|\Delta x_\alpha(t)\| \longrightarrow 0$ lorsque $\Delta t = t - t' \longrightarrow 0$.
D'après (a)' et (iii), on a :

$$g(x_\alpha(t)) = g(x' + \Delta x_\alpha(t)) \leq 0 \quad x_\alpha(t) \in \pi_\alpha \cap B(x')$$

Comme $x' \in F$, $g(x') = 0$, et par suite :

$$\left. \text{grad } g(x) \right|_{x'} \cdot \Delta x_\alpha(t) + o(\|\Delta x_\alpha(t)\|) \leq 0 \quad (1.71)$$

$$\text{où } \frac{o(\|\Delta x_\alpha(t)\|)}{\|\Delta x_\alpha(t)\|} \longrightarrow 0 \text{ lorsque } \|\Delta x_\alpha(t)\| \longrightarrow 0$$

En divisant (1.71) par $\Delta t > 0$, nous obtenons :

$$\left. \text{grad } g(x) \right|_{x'} \cdot \frac{\Delta x_\alpha(t)}{\Delta t} + \frac{o(\|\Delta x_\alpha(t)\|)}{\Delta t} \leq 0$$

$$\text{Lorsque } \Delta t \longrightarrow 0, \quad \frac{\Delta x_\alpha(t)}{\Delta t} \longrightarrow f(x', u^b, e_{x_i}(x'))$$

et de l'inégalité ci-dessus nous déduisons :

$$\left. \text{grad } g(x) \right|_{x'} \cdot f(x', u^b, e_{x_i}(x')) \leq 0 \quad \begin{array}{l} \forall x' \in \pi_F, x' \notin \theta^p \cup \theta^F \\ \forall u^b \in K^p \end{array} \quad (1.72)$$

En appliquant la propriété (b)' du paragraphe précédent à un trajet π_β de point initial $x''' = x'$, engendré par (μ_{x_i}, β) , où $\beta: X \rightarrow \beta(x)$ est définie par (1.70), on obtient par une démonstration analogue :

$$\left. \text{grad } g(x) \right|_{x'} \cdot f(x', \mu_{x_i}(x'), v^b) \geq 0 \quad \forall x' \in \pi_F, x' \notin \theta^p \cup \theta^E \quad (1.73)$$

$$\forall v^b \in K^E$$

Le trajet π_F appartenant à F , nous déduisons de (1.72) et (1.73) :

$$\left. \text{grad } g(x) \right|_{x'} \cdot f(x', \mu_{x_i}(x'), e_{x_i}(x')) = 0 \quad \forall x' \in \pi_F, x' \notin \theta^p \cup \theta^E \quad (1.74)$$

Ces résultats sont résumés dans le lemme suivant :

Lemme 1.4. Si $A = \text{comp } B$, $F \triangleq \partial A = \partial B$, si les hypothèses 1.1, 1.2, 1.3, sont satisfaites, alors en tout point $x \in \pi_F$, tel que $x \notin \theta^p \cup \theta^E$ on a :

$$\begin{aligned} \max_{u \in K^p} n(x) \cdot f(x, u, e_{x_i}(x)) &= \min_{v \in K^E} n(x) \cdot f(x, \mu_{x_i}(x), v) \\ &= n(x) \cdot f(x, \mu_{x_i}(x), e_{x_i}(x)) = 0 \end{aligned} \quad (1.75)$$

où $n(x) = \text{grad } g(x)$

(x_i est le point initial de π_F).

1.19 GRADIENT ET VECTEUR ADJOINT.

Nous désignerons par $X = x(\tau)$, le point courant de π_F ,
 trajet de point initial $X^i = x(0)$, engendré par (γ_{x^i}, e_{x^i}) .
 Soit $X' = x(\tau')$ un point de π_F tel que $X' \notin \partial^p \cup \partial^e$,
 et soit $B(X')$ une boule ouverte, contenue dans G , sur
 laquelle γ_{x^i} et e_{x^i} sont de classe C^1 (Hypothèse 1.2).

D'après l'Hypothèse 1.3, dans une boule ouverte arbitrai-
 rement petite $B(X')$, de centre X' , il existe $(n-1)$
 points $\hat{X}'$ qui appartiennent à $B(X') \cap \partial A_{e_{x^i}}$ et qui
 peuvent être représentés par :

$$\hat{X}' = X' + \varepsilon \eta' + o(\varepsilon) \quad (1.76)$$

où $\frac{\|o(\varepsilon)\|}{\varepsilon} \longrightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$, $\varepsilon > 0$

et où les $(n-1)$ vecteurs η' correspondants satisfont à

$$\left. \text{grad } g(x) \right|_{X'} \cdot \eta' = 0,$$

et sont linéairement indépendants.

De plus à tout point $\hat{X}'$ défini ci-dessus par (1.76)
 où ε est positif, on peut associer un autre point
 de $B(X') \cap \partial A_{e_{x^i}}$ pour lequel le vecteur η' est le même,
 mais ε négatif.

Comme $X' \notin \partial^p \cup \partial^e$, pour ε assez petit,
 on a $\hat{X}' \notin \partial^p \cup \partial^e$.

Désignons par π'_F , $\pi'_F \subseteq \pi_F$ un trajet de point initial x' , engendré par (μ_{xi}, e_{xi}) , de support

$\Gamma_{x'}(x', \mu_{xi}, e_{xi})$. Soit $\hat{\pi}$ un trajet de point initial $\hat{x}'$, engendré par (μ_{xi}, e_{xi}) , de support $\Gamma_{\hat{x}'}(\hat{x}', \mu_{xi}, e_{xi})$. Il existe $\hat{\pi} \neq \pi^0$ car $\hat{x}' \notin \theta^P \cup \theta^E$ et μ_{xi} et e_{xi} sont de classe C^1 dans un voisinage de $\hat{x}' \in B(x')$.

Soit $x'' = x'(\tau'')$ un point de $\pi'_F \subseteq \pi_F$, tel que

$x'' \notin \theta^P \cup \theta^E$. Alors pour un ε assez petit, on a :

$$\hat{x}'' = \hat{x}(\tau'') = x'' + \varepsilon \eta'' + o(\varepsilon, \tau'') \notin \theta^P \cup \theta^E \quad (1.77)$$

où $\frac{\|o(\varepsilon, \tau'')\|}{\varepsilon} \longrightarrow 0$ uniformément en τ'' lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$

et où $\eta'' = \hat{\eta}(\tau'')$, $\hat{\eta} : \tau \longrightarrow \hat{\eta}(\tau)$ étant solution de l'équation :

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial \mu_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial e_{xi}}{\partial x} \right) \bigg|_{x=x'(\tau)} \cdot \eta \quad (1.78)$$

qui satisfait la condition initiale $\hat{\eta}(0) = \eta'$.

Comme $\hat{x}' \in \partial A_{e_{xi}}$, on déduit du lemme 1.2 :

$$\hat{x}'' \in \overline{\text{comp } A_{e_{xi}}} \subseteq \overline{\text{comp } A} = \overline{B}$$

Pour ε assez petit, d'après l'hypothèse 1.3 (iii), nous avons :

$$g(\hat{x}'') = g(x'' + \varepsilon \eta'' + o(\varepsilon, \tau'')) \leq 0$$

et d'après l'hypothèse 1.3 (ii) :

$$g(\hat{x}'') = g(x'') + \left. \text{grad } g(x) \right|_{x''} \cdot (\varepsilon \eta'' + o(\varepsilon, \tau'')) + o'(|\varepsilon \eta'' + o(\varepsilon, \tau'')|) \leq 0$$

ou encore :

$$g(\hat{x}'') = g(x'') + \varepsilon \left. \text{grad } g(x) \right|_{x''} \cdot \eta'' + o(\varepsilon, \tau'') \leq 0 \quad (1.79)$$

où $\frac{|o(\varepsilon, \tau'')|}{\varepsilon} \rightarrow 0$ uniformément en τ'' lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Comme $x'' \in \pi'_F \subseteq \pi_F$ et que $\pi_F \subset \bar{F}$, on a $g(x'') = 0$ et

$$g(\hat{x}'') = \varepsilon \left. \text{grad } g(x) \right|_{x''} \cdot \eta'' + o(\varepsilon, \tau'') \leq 0 \quad (1.79)'$$

Pour un ε suffisamment petit, le signe de cette expression est celui du 1^o terme du second membre, soit $\varepsilon \left. \text{grad } g(x) \right|_{x''} \cdot \eta''$. Mais ε peut être positif ou négatif et d'après l'hypothèse 1.3 (ii), $\left. \text{grad } g(x) \right|_{x''} \neq 0$, par suite (1.79)' ne peut être

satisfaite que si :

$$\left. \text{grad } g(x) \right|_{x''} \cdot \eta'' = 0 \quad (1.80)$$

Ceci est vrai pour tout point $x'' \in \pi'_F$, tel que $x'' \notin \theta^P \cup \theta^E$ et pour $(n-1)$ vecteurs linéairement indépendants η'' , $\eta'' = \hat{\eta}(\tau'')$ où $\hat{\eta} : \tau \rightarrow \hat{\eta}(\tau)$ est solution de l'équation (1.78) et satisfait la condition initiale $\hat{\eta}(0) = \eta'$.

Nous pouvons encore écrire (1.80) sous la forme :

$$\left. \text{grad } g(x) \right|_{x=x'(\tau)} \cdot \hat{\eta}(\tau) = 0 \quad \forall x = x'(\tau) \notin \theta^P \cup \theta^E \quad (1.81)$$

Considérons maintenant $\hat{\lambda} : \tau \rightarrow \hat{\lambda}(\tau)$, solution de l'équation :

$$\frac{d\hat{\lambda}}{d\tau} = - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial h_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial e_{xi}}{\partial x} \right)^T \bigg|_{x=x'(\tau)} \cdot \hat{\lambda} \quad (1.82)$$

L'équation (1.82) est l'équation adjointe de l'équation (1.45) pour la condition initiale $\hat{\lambda}(0) = \lambda'$ (que nous préciserons plus loin). On voit facilement que :

$$\frac{d}{d\tau} \left(\hat{\lambda}(\tau) \cdot \hat{\eta}(\tau) \right) = 0 \quad \text{pour tout } \tau \text{ tel que } x = x'(\tau) \in \pi'_F$$

Donc si on choisit λ' orthogonal au plan tangent à F en x' , c'est-à-dire si λ' et $\text{grad } g(x) \big|_{x'}$ ont même support, le vecteur $\hat{\lambda}(\tau)$ reste orthogonal au plan tangent à F en tout point $x = x'(\tau)$ de π'_F , tel que $x'(\tau) \notin \theta^P \cup \theta^E$. Rappelons que $\pi'_F \subseteq \pi_F \subset F$.

Le vecteur $\hat{\lambda} : \tau \longrightarrow \hat{\lambda}(\tau)$ solution de l'équation (1.82) est un vecteur continu non nul et si à $\tau = 0$, nous choisissons $\lambda' = \hat{\lambda}(0)$ et $\text{grad } g(x) \big|_{x'}$ co-directionnels, les vecteurs $\hat{\lambda}(\tau)$ et $\text{grad } g(x) \big|_{x=x'(\tau)}$ resteront co-directionnels le long du trajet π'_F pour tout τ tel que $x = x'(\tau) \notin \theta^P \cup \theta^E$.

1.20 UN PRINCIPE DU MINIMAX - THEOREME 1.1.

Du lemme 1.4 nous déduisons le théorème suivant :

Théorème 1.1. Si $A = \text{comp } B$, $\bar{r} \triangleq \partial A = \partial B$, si π_F est un trajet de point initial x^i , $x^i \in F \cap G$, engendré par (μ_{x^i}, e_{x^i}) , de support $\Gamma_x(x^i, \mu_{x^i}, e_{x^i})$, et si :

- (i) pour tout point x' de π_F , $x' = x(\tau)$, il existe un voisinage de ce point sur lequel μ_{x^i} et e_{x^i} sont de classe C^1 ,
- (ii) il existe une représentation analytique $g(x) = 0$ de la frontière F et pour tout point x' de π_F $x' \notin \theta^P \cup \theta^E$, il existe un

voisinage $B(x')$ de ce point sur lequel la
fonction $g: X \rightarrow g(x)$ est de classe C^1 et $\text{grad } g(x)$
est défini et différent de zéro et tel que :

$$g(x) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in \bar{A} \cap B(x')$$

$$g(x) \leq 0 \quad \text{pour tout } x \in \bar{B} \cap B(x')$$

alors, il existe un vecteur continu non nul $\hat{\lambda}: \tau \rightarrow \hat{\lambda}(\tau)$,
qui est solution de l'équation (1.82) et qui est
tel que :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \text{Max}_{u \in K^p} \hat{\lambda}(\tau) \cdot f(x, u, e_{x_i}(x)) &= \text{Min}_{v \in K^q} \hat{\lambda}(\tau) \cdot f(x, \mu_{x_i}(x), v) \\ &= \hat{\lambda}(\tau) \cdot f(x, \mu_{x_i}(x), e_{x_i}(x)) \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad \hat{\lambda}(\tau) \cdot f(x, \mu_{x_i}(x), e_{x_i}(x)) = 0$$

quel que soit τ tel que $x = x(\tau) \in \pi_F$.

Démonstration. Soit $\tau^\dagger$ la valeur de τ au point final
 $x^\dagger = x(\tau^\dagger)$ du trajet π_F . Si $x^\dagger \notin \theta^p \cup \theta^e$,
 le théorème 1.1 se déduit facilement du lemme 1.4 et des
 résultats du paragraphe précédent.

Supposons donc que $x^\dagger \in \theta^p \cup \theta^e$; Soit $\pi'_F, \pi'_F \in \pi_F$,
 un trajet de point initial $x' \in \pi_F$, engendré par (μ_{x_i}, e_{x_i}) , de
 support $\Gamma_{x'}(x', \mu_{x_i}, e_{x_i})$.

On a : $\pi'_F = \{x; x = x'(\tau), \tau \in [0, \tau' - \tau'], x' \in \gamma(x', \mu_{x_i}, e_{x_i})\}$,

où τ' est tel que $x' = x(\tau')$, avec $x(0) = x^i$.

Soit τ'' tel que $x'' = x'(\tau'') \in \pi'_F$, $x'' \notin \theta^F \cup \theta^E$. Au point x'' les vecteurs $\hat{\lambda}(\tau'' + \tau')$ et $\left. \text{grad } g(x) \right|_{x=x'(\tau'')}$ sont

co-directionnels et si nous appliquons le lemme 1.4, nous obtenons :

$$\text{Max}_{u \in K^P} \hat{\lambda}(\tau'' + \tau') \cdot f(x'', u, e_{x''}(x'')) = \text{Min}_{v \in K^E} \hat{\lambda}(\tau'' + \tau') \cdot f(x'', \nu_{x''}(x''), v) \quad (1.83)$$

$$= \hat{\lambda}(\tau'' + \tau') \cdot f(x'', \nu_{x''}(x''), e_{x''}(x'')) = 0 \quad (1.84)$$

Le vecteur fonction f est de classe C^1 sur $G \times U \times V$, les fonctions $\nu_{x''}$ et $e_{x''}$ sont de classe C^1 dans un voisinage de $\pi'_F \subseteq \pi_F$ et les fonctions $x': \tau \longrightarrow x'(\tau)$ et $\hat{\lambda}: \tau \longrightarrow \hat{\lambda}(\tau)$ sont des fonctions continues de τ pour tout τ tel que $x = x'(\tau) \in \pi'_F$. Donc, la fonction :

$$\hat{H}: \tau \longrightarrow \hat{H}(\tau); \quad \hat{H}(\tau) = \hat{\lambda}(\tau + \tau') \cdot f(x'(\tau), \nu_{x'(\tau)}(x'(\tau)), e_{x'(\tau)}(x'(\tau))) \quad (1.85)$$

est une fonction continue de τ , $\tau \in [0, \tau^t - \tau']$, et par continuité, l'égalité (1.84) est encore vraie en $x^t = x(\tau^t) = x'(\tau^t - \tau')$.

Soit finalement :

$$\hat{\lambda}(\tau + \tau') \cdot f(x'(\tau), \nu_{x'(\tau)}(x'(\tau)), e_{x'(\tau)}(x'(\tau))) = 0 \quad \text{quel que soit } \tau \in [0, \tau^t - \tau'].$$

C'est-à-dire :

$$\hat{\lambda}(\tau) \cdot f(x(\tau), p_{x_i}(x(\tau)), e_{x_i}(x(\tau))) = 0 \quad \text{quel que soit } \tau \in [0, \tau^t] \quad (1.86)$$

et la partie (b) du théorème 1.1 est démontrée.

Reprenant maintenant les inégalités (1.72) et (1.73) au point $x'' = x'(\tau'') \in \pi'_F$, $x'' \notin \theta^p \cup \theta^e$, nous avons :

$$\hat{\lambda}(\tau'' + \tau') \cdot f(x'(\tau''), u^b, e_{x_i}(x'(\tau''))) \leq 0 \quad \forall u^b \in K^p \quad (1.87)$$

$$\hat{\lambda}(\tau'' + \tau') \cdot f(x'(\tau''), p_{x_i}(x'(\tau'')), v^b) \geq 0 \quad \forall v^b \in K^e \quad (1.88)$$

et par continuité de la fonction $\hat{\mathcal{H}} : \tau \longrightarrow \hat{\mathcal{H}}(\tau)$, ces inégalités sont encore vraies pour $\tau = \tau'' = \tau^t - \tau'$, soit :

$$\hat{\lambda}(\tau^t) \cdot f(x'(\tau^t - \tau'), u^b, e_{x_i}(x'(\tau^t - \tau'))) \leq 0 \quad \forall u^b \in K^p$$

$$\hat{\lambda}(\tau^t) \cdot f(x'(\tau^t - \tau'), p_{x_i}(x'(\tau^t - \tau')), v^b) \geq 0 \quad \forall v^b \in K^e$$

D'après l'égalité (1.86) écrite pour $\tau = \tau^t$, on voit que :

$$\max_{u \in K^p} \hat{\lambda}(\tau^t) \cdot f(x'(\tau^t - \tau'), u, e_{x_i}(x'(\tau^t - \tau'))) = \hat{\lambda}(\tau^t) \cdot f(x'(\tau^t - \tau'), p_{x_i}(x'(\tau^t - \tau')), e_{x_i}(x'(\tau^t - \tau')))$$

$$\min_{v \in K^e} \hat{\lambda}(\tau^t) \cdot f(x'(\tau^t - \tau'), p_{x_i}(x'(\tau^t - \tau')), v) = \hat{\lambda}(\tau^t) \cdot f(x'(\tau^t - \tau'), p_{x_i}(x'(\tau^t - \tau')), e_{x_i}(x'(\tau^t - \tau')))$$

$$\hat{\lambda}(\tau^t) \cdot f(x'(\tau^t - \tau'), p_{x_i}(x'(\tau^t - \tau')), e_{x_i}(x'(\tau^t - \tau'))) = 0$$

Donc les inégalités (1.87) et (1.88) sont vraies pour tout $\tau, \tau' \in [0, \tau^* - \tau']$ et en tenant compte de (1.86), on obtient la partie (a) du théorème 1.1.

1.21 SYSTEMES AUTONOMES ET CIBLES INDEPENDANTES DU TEMPS.

Dans un système autonome, le vecteur fonction f , de l'équation différentielle 1.11 (ou 1.4), ne contient pas explicitement la variable temps $X_n = t$. Il faut pour cela que dans les fonctions $\mu: X \rightarrow \mu(X)$ et $e: X \rightarrow e(X)$ la variable temps n'intervienne pas explicitement. Dans ce cas, en un point X de coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$, on a :

$$\mu(X) = \mu(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

$$e(X) = e(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

Nous avons vu dans le paragraphe 1.19 qu'il existait des liens entre les vecteurs $\hat{\lambda}(\tau)$ et $\left. \text{grad } g(X) \right|_{X=x'(\tau)}$.

Nous allons étudier ces liens dans le cas de systèmes autonomes avec des cibles θ^p et θ^e indépendantes du temps.

Posons $\hat{f}(\tau) = \left. \text{grad } g(X) \right|_{X=x'(\tau)}$ et supposons que

la fonction $g: X \rightarrow g(X)$ soit deux fois différentiable. D'après (1.81)

nous avons :

$$\frac{d}{d\tau} \left(\hat{\gamma}(\tau) \cdot \hat{\eta}(\tau) \right) = \frac{d\hat{\gamma}(\tau)}{d\tau} \cdot \hat{\eta}(\tau) + \hat{\gamma}(\tau) \cdot \frac{d\hat{\eta}(\tau)}{d\tau} = 0$$

d'où l'on tire, en utilisant (1.78) :

$$\frac{d\hat{\gamma}(\tau)}{d\tau} \cdot \hat{\eta}(\tau) = - \hat{\gamma}(\tau) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial h_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial e_{xi}}{\partial x} \right) \Bigg|_{x=x'(\tau)} \cdot \hat{\eta}(\tau)$$

ou encore :

$$\hat{\eta}(\tau) \cdot \frac{d\hat{\gamma}(\tau)}{d\tau} = - \hat{\eta}(\tau) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial h_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial e_{xi}}{\partial x} \right) \Bigg|_{x=x'(\tau)} \cdot \hat{\gamma}(\tau) \quad (1.89)$$

Posons : $M = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial h_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial e_{xi}}{\partial x} \right)^T$

Comme $x_n = t$, $f_n \equiv 1$, et par suite :

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial u_k} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, r$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial v_l} = 0 \quad l = 1, 2, \dots, s$$

et la $n^{\text{ième}}$ colonne de M est nulle.

D'autre part comme le système 1.11 (ou 1.4) est autonome :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_n} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_n} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, r$$

$$\frac{\partial v_l}{\partial x_n} = 0 \quad l = 1, 2, \dots, s$$

et la $n^{\text{ième}}$ ligne de M est nulle.

Remarquons maintenant que θ^p et θ^E étant indépendants du temps, ce sont des sous-ensembles de $G \subseteq E^n$, qui sont cylindriques de direction x_n ; dans ce cas les ensembles A et B , de même que leur frontière commune F sont des sous-ensembles de G qui sont également cylindriques de direction x_n , et la fonction $g: X \rightarrow g(x)$ ne dépend pas de la variable x_n . Donc la $n^{\text{ième}}$ composante du vecteur $\hat{y}(\tau)$

On se place ici dans le cas où $F \neq \emptyset$, c'est-à-dire $A \neq \emptyset$ et $A \subset G$, de même $B \neq \emptyset$ et $B \subset G$.

est nulle. Soit :

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}, 0) \quad (1.90)$$

L'équation (1.89) est vérifiée, au point $x = x'(\tau)$, par $(n-1)$ vecteurs $\eta = \hat{\eta}(\tau)$ linéairement indépendants, ce qui, en tenant compte de (1.90) conduit à :

$$\frac{d\hat{\gamma}(\tau)}{d\tau} = - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial h_{x_i}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial e_{x_i}}{\partial x} \right)^T \bigg|_{x=x'(\tau)} \cdot \hat{\gamma}(\tau) \quad (1.91)$$

Le vecteur $\hat{\gamma}(\tau) = \text{grad } g(x) \big|_{x=x'(\tau)}$ est donc solution de l'équation adjointe (1.82), de plus on a vu qu'il avait même direction que $\hat{\lambda}(\tau)$. On a finalement :

$$\hat{\lambda}(\tau) = k \text{ grad } g(x) \big|_{x=x'(\tau)}$$

où k est une constante positive.

1.22 EXEMPLE 1.1.

Pour illustrer les paragraphes précédents nous allons étudier un exemple simple. Soit :

$$\dot{x}_1 = u$$

$$\dot{x}_2 = v$$

les équations différentielles qui régissent le mouvement d'un système. x_1 et x_2 sont les variables d'état du système dans E^2 u et v les valeurs prises en $\tilde{X} = (x_1, x_2)$ par les stratégies μ et e des joueurs J^P et J^E . Ces stratégies ne dépendent pas explicitement du temps $x_3 = t$, c'est-à-dire qu'en un point $X = (x_1, x_2, x_3)$ de E^3 , dont la projection sur E^2 est $\tilde{X} = (x_1, x_2)$, on a :

$$\mu(X) = \mu(\tilde{X}) \quad \text{et} \quad e(X) = e(\tilde{X})$$

On suppose que K^P et K^E sont définis par :

$$|u| \leq 1 \quad \text{et} \quad |v| \leq 1$$

et que le jeu est à une cible, soit :

$$\theta^E = \phi$$

$$\theta^P = \left\{ X ; x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\}$$

Le joueur J^P veut atteindre θ^P , J^E veut l'éviter.

On a donc affaire dans E^3 à un système autonome dont la troisième équation est $\dot{x}_3 = 1$, et à cible indépendante du temps. En utilisant les résultats du paragraphe précédent, on peut ramener ce problème dans E^3 à un problème dans E^2 . La cible est alors le cercle d'équation $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Les ensembles $A_e, A, B_\mu, B, \dots$ sont des cylindres

de direction X_3 qui se projettent sur E^2 suivant A'_e, A'
 $B'_\mu, B', \dots$ Le point représentatif du jeu dans E^2 reste
dans E^2 et l'on a :

$$A'_e = \{ \tilde{x}^i ; \exists \mu, (\mu, e) \in \mathcal{C}_{E^2}^P(\tilde{x}^i) \} \quad (1.92)$$

$$A' = \{ \tilde{x}^i ; \forall e, \exists \mu, (\mu, e) \in \mathcal{C}_{E^2}^P(\tilde{x}^i) \} \quad (1.93)$$

$$B'_\mu = \{ \tilde{x}^i ; \exists e, (\mu, e) \in \mathcal{C}_{E^2}^E(\tilde{x}^i) \} \quad (1.94)$$

$$B' = \{ \tilde{x}^i ; \forall \mu, \exists e, (\mu, e) \in \mathcal{C}_{E^2}^E(\tilde{x}^i) \} \quad (1.95)$$

où $\mathcal{C}_{E^2}^P(\tilde{x}^i)$ et $\mathcal{C}_{E^2}^E(\tilde{x}^i)$ sont respectivement les
ensembles de couples stratégiques jouables pour J^P et J^E
au point $\tilde{x}^i$ et dans E^2 .

Désignons par $\tilde{w}$ le vecteur de E^2 de composantes u
et v . On voit facilement que (Figure 1.1) :

Si $v = 1$ et $|u| \leq 1$ alors $\text{Ext}_{\tilde{w}} \in PQ$

Si $v = -1$ et $|u| \leq 1$ alors $\text{Ext}_{\tilde{w}} \in RS$

Si $u = 1$ et $|v| \leq 1$ alors $\text{Ext}_{\tilde{w}} \in QR$

Si $u = -1$ et $|v| \leq 1$ alors $\text{Ext}_{\tilde{w}} \in SP$

Prenons pour J^e une stratégie admissible constante soit par exemple $e(\tilde{x}) = 1$, $\forall \tilde{x} \in E^2$; on peut construire facilement le domaine A'_e correspondant, c'est la région hachurée sur la figure 1.2 que nous désignerons par A'_1 . Pour la stratégie $e(\tilde{x}) = -1$, $\forall \tilde{x} \in E^2$, on obtient un domaine A'_{-1} qui est le symétrique de A'_1 par rapport à l'axe x_1 .

De même, si on prend pour J^p une stratégie admissible constante, par exemple $p(\tilde{x}) = 1$, $\forall \tilde{x} \in E^2$, le domaine B'_p correspondant est la région hachurée de la figure 1.3. Nous le désignerons par B'_1 . Pour $p(\tilde{x}) = -1$, $\forall \tilde{x} \in E^2$, on obtient un domaine B'_{-1} qui est le symétrique de B'_1 par rapport à l'axe x_2 .

Nous pouvons remarquer dès à présent que $A'_e \supseteq A'_1 \cap A'_{-1}$, pour toute stratégie e , non nécessairement constante, c'est-à-dire pour toute stratégie e telle que $|e(\tilde{x})| \leq 1$ en tout point $\tilde{x} \in E^2$. Le domaine A' est donc déterminé, c'est la région hachurée de la figure 1.4. On a $A' = A'_1 \cap A'_{-1}$.

On trouve de même que pour toute stratégie p telle que $|p(\tilde{x})| \leq 1$ en tout point $\tilde{x} \in E^2$, on a $B'_p \supseteq B'_1 \cap B'_{-1}$. On a donc $B' = B'_1 \cap B'_{-1}$ et B' est la région non hachurée de la figure 1.4.

Nous avons $A' = \text{comp } B'$, résultat que nous pouvons retrouver d'une autre façon. En effet, soit $\tilde{x}^i \in A'$ tel

que $X_i^1 \leq 0$: si J^P choisit la stratégie constante μ : $\mu(\tilde{x}) = 1$, $\forall \tilde{x} \in E^2$, alors quelle que soit la stratégie e de J^E , $(\mu, e) \in \mathcal{C}_{E^2}^P(\tilde{x}^i)$.

Soit maintenant $\tilde{x}^i \in A'$ tel que $X_i^1 \geq 0$: si J^P choisit la stratégie constante μ , $\mu(\tilde{x}) = -1$, $\forall \tilde{x} \in E^2$, alors quelle que soit la stratégie admissible e de J^E , $(\mu, e) \in \mathcal{C}_{E^2}^P(\tilde{x}^i)$. C'est-à-dire que pour tout $\tilde{x}^i \in A'$, il existe une stratégie μ pour J^P , telle que, quelle que soit la stratégie admissible e de J^E , (μ, e) soit un couple stratégique jouable pour J^P au point $\tilde{x}^i$, dans E^2 . Soit :

$$A' = \left\{ \tilde{x}^i ; \exists \mu \quad \forall e, (\mu, e) \in \mathcal{C}_{E^2}^P(\tilde{x}^i) \right\} \quad (1.96)$$

Le jeu est à une seule cible, donc :

$$(\mu, e) \notin \mathcal{C}_{E^2}^E(\tilde{x}^i) \iff (\mu, e) \in \mathcal{C}_{E^2}^P(\tilde{x}^i)$$

et d'après (1.95) on a :

$$\text{comp } B' = \left\{ \tilde{x}^i ; \exists \mu \quad \forall e, (\mu, e) \in \mathcal{C}_{E^2}^P(\tilde{x}^i) \right\} \quad (1.97)$$

et comparant (1.96) et (1.97) on a bien :

$$A' = \text{comp } B' \quad (1.98)$$

Bien entendu :

$$B' = \text{comp } A' \quad (1.98)$$

Notons que A' est fermé, donc contient sa frontière

$$F' = \partial A' = \partial B'.$$

On voit facilement qu'en tout point $\tilde{X}^i \in F'$, l'hypothèse 1.1 est vérifiée ; désignons par $(HK]$ le segment HK ouvert en H , fermé en K . On a :

- (i) si $\tilde{X}^i \in (MT_1]$, $p_{\tilde{X}^i}: \tilde{X} \rightarrow p_{\tilde{X}^i}(\tilde{X})=1, \forall \tilde{X} \in E^2$ et $e_{\tilde{X}^i}: \tilde{X} \rightarrow e_{\tilde{X}^i}(\tilde{X})=1, \forall \tilde{X} \in E^2$
- (ii) si $\tilde{X}^i \in (NT_2]$, $p_{\tilde{X}^i}: \tilde{X} \rightarrow p_{\tilde{X}^i}(\tilde{X})=-1, \forall \tilde{X} \in E^2$ et $e_{\tilde{X}^i}: \tilde{X} \rightarrow e_{\tilde{X}^i}(\tilde{X})=1, \forall \tilde{X} \in E^2$
- (iii) si $\tilde{X}^i \in (NT_2']$, $p_{\tilde{X}^i}: \tilde{X} \rightarrow p_{\tilde{X}^i}(\tilde{X})=-1, \forall \tilde{X} \in E^2$ et $e_{\tilde{X}^i}: \tilde{X} \rightarrow e_{\tilde{X}^i}(\tilde{X})=-1, \forall \tilde{X} \in E^2$
- (iv) si $\tilde{X}^i \in (MT_1']$, $p_{\tilde{X}^i}: \tilde{X} \rightarrow p_{\tilde{X}^i}(\tilde{X})=1, \forall \tilde{X} \in E^2$ et $e_{\tilde{X}^i}: \tilde{X} \rightarrow e_{\tilde{X}^i}(\tilde{X})=-1, \forall \tilde{X} \in E^2$
- (v) si $\tilde{X}^i = M$, $p_{\tilde{X}^i}: \tilde{X} \rightarrow p_{\tilde{X}^i}(\tilde{X})=1, \forall \tilde{X} \in E^2$ et $e_{\tilde{X}^i}: \tilde{X} \rightarrow e_{\tilde{X}^i}(\tilde{X})=\pm 1, \forall \tilde{X} \in E^2$
- (vi) si $\tilde{X}^i = N$, $p_{\tilde{X}^i}: \tilde{X} \rightarrow p_{\tilde{X}^i}(\tilde{X})=-1, \forall \tilde{X} \in E^2$ et $e_{\tilde{X}^i}: \tilde{X} \rightarrow e_{\tilde{X}^i}(\tilde{X})=\pm 1, \forall \tilde{X} \in E^2$

Remarquons enfin, d'après (1.98) et (1.98)', que dans ce jeu, pour tout point $\tilde{X}^i$ du plan (X_1, X_2) , il existe une stratégie pure pour l'un des joueurs :

pour tout $\tilde{X}^i \in A'$, $\exists \bar{p}$

pour tout $\tilde{X}^i \in \text{comp} A'$, $\exists \bar{e}$

CHAPITRE II

STRATEGIES OPTIMALES - THEOREME DU MINIMAX

Dans ce Chapitre nous nous intéresserons à la notion de couple stratégique fortement jouable (cf. Chap. I. Déf. 1.8).

2.1 STRATEGIES OPTIMALES - ENSEMBLES DU JEU.

Définition 2.1.

Etant donné un point initial x^i , nous dirons que $\bar{p}_{x^i}^*$ est une stratégie optimale pour J^P en x^i , si :

$$(\bar{p}_{x^i}^*, e) \in \mathcal{C}^P(x^i) \quad \forall e \in \mathcal{E}$$

De même, étant donné un point initial x^i , nous dirons que $\bar{e}_{x^i}^*$ est une stratégie optimale pour J^E en x^i si :

$$(p, \bar{e}_{x^i}^*) \in \mathcal{C}^E(x^i) \quad \forall p \in \mathcal{P}$$

Remarques. Nous avons vu (chap. I § 1.7) que dans un jeu à une cible ($\emptyset^E = \phi$) :

$$(p, e) \in \mathcal{C}^E(x^i) \iff (p, e) \in \mathcal{C}^E(x^i) \quad (2.1)$$

Notons que dans les cas (a) et (b), si $\theta^P \cap \theta^E = \phi$ et si l'application $\gamma: (x^i, p, e) \longrightarrow \gamma(x^i, p, e)$ est univoque, alors :

$$(p, e) \in \mathcal{C}^{*P}(x^i) \iff (p, e) \in \mathcal{C}^P(x^i) \quad (2.2)$$

$$(p, e) \in \mathcal{C}^{*E}(x^i) \iff (p, e) \in \mathcal{C}^E(x^i) \quad (2.3)$$

Définition 2.2.

Soit :

$$\mathcal{Q}^{*P} \triangleq \left\{ x^i ; \exists \tilde{p}_{x^i} \quad \forall e, (\tilde{p}_{x^i}, e) \in \mathcal{C}^{*P}(x^i) \right\} \quad (2.4)$$

$$\mathcal{Q}^{*E} \triangleq \left\{ x^i ; \exists \tilde{e}_{x^i} \quad \forall p, (p, \tilde{e}_{x^i}) \in \mathcal{C}^{*E}(x^i) \right\} \quad (2.5)$$

Nous dirons que $\mathcal{Q}^{*P}$ et $\mathcal{Q}^{*E}$ sont les ensembles du jeu.

Remarque. Dans le cas (b) ($\theta^E = \phi$), il est clair que :

$$\mathcal{Q}^{*E} = \text{comp } A \quad (\gamma \text{ univoque ou non})$$

$$\mathcal{Q}^{*P} = \text{comp } B \quad \text{si } \gamma \text{ est univoque.}$$

2.2 PROPRIETES DES ENSEMBLES DU JEU.

Si $\theta^P \neq \phi$ et $\theta^P \cap \theta^E = \phi$, $\mathcal{Q}^{*P} \supseteq \theta^P$ donc $\mathcal{Q}^{*P} \neq \phi$

Si $\theta^E \neq \phi$ et $\theta^P \cap \theta^E = \phi$, $\mathcal{Q}^{*E} \supseteq \theta^E$ donc $\mathcal{Q}^{*E} \neq \phi$

D'autre part, que $\theta^P \cap \theta^E$ soit vide ou non d'après les définitions 1.8 et 2.2 et d'après les relations (1.31) - (1.38), il est clair que :

$$\bar{Q}^P \subseteq A \cap \text{comp } B \quad (2.6)$$

$$\bar{Q}^E \subseteq B \cap \text{comp } A \quad (2.7)$$

et par suite : $\bar{Q}^P \cap \bar{Q}^E = \emptyset \quad (2.8)$

2.3 STRATEGIES OPTIMALES SUR UN ENSEMBLE.

Définitions 2.3.

Soit $\Omega^P \subseteq \bar{Q}^P$. Nous dirons que $\bar{r}^*$ est une stratégie optimale pour J^P sur Ω^P si :

$$(\bar{r}^*, e) \in \bar{C}^P(x^i) \quad \forall x^i \in \Omega^P, \quad \forall e \in S^E \quad (2.9)$$

De même, soit $\Omega^E \subseteq \bar{Q}^E$. Nous dirons que $\bar{e}^*$ est une stratégie optimale pour J^E sur Ω^E si :

$$(\bar{r}, \bar{e}^*) \in \bar{C}^E(x^i) \quad \forall x^i \in \Omega^E, \quad \forall \bar{r} \in S^P \quad (2.10)$$

D'après ces définitions, en tout point $x^i \in \Omega^P$ (resp. $x^i \in \Omega^E$), il existe une stratégie optimale pour J^P (resp. pour J^E), $\bar{r}_{x^i}^*$ (resp. $\bar{e}_{x^i}^*$), telle que :

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{x_i}^*(x) &= \tilde{r}^*(x) & \forall x \in G \\ (\text{resp. } \tilde{e}_{x_i}^*(x) &= \tilde{e}^*(x) & \forall x \in G) \end{aligned}$$

2.4 SURFACE DU JEU - PROPRIETES.

Définition 2.4.

Posons :

$$\boxed{\Gamma} \triangleq G \cap \partial \tilde{Q}^P \cap \partial \tilde{Q}^E \quad (2.11)$$

$\boxed{\Gamma}$ est appelée la surface du jeu.

Notons que $\boxed{\Gamma}$ peut être vide.

Propriété 2.1.

$$\boxed{\Gamma} = G \cap \overline{\tilde{Q}^P} \cap \overline{\tilde{Q}^E} \quad (2.12)$$

$$\text{on a : } \tilde{Q}^P \cap \tilde{Q}^E = \emptyset \quad (2.8)$$

$$\text{donc } \tilde{Q}^P \subseteq \text{comp } \tilde{Q}^E$$

$$\text{et } \tilde{Q}^E \subseteq \text{comp } \tilde{Q}^P$$

$$\text{D'où } \overline{\tilde{Q}^P} \subseteq \overline{\text{comp } \tilde{Q}^E} \quad (2.13)$$

$$\overline{\tilde{Q}^E} \subseteq \overline{\text{comp } \tilde{Q}^P} \quad (2.14)$$

D'autre part (2.11) s'écrit :

$$\Xi = G \cap \overline{\check{Q}^P} \cap \overline{\text{comp } \check{Q}^P} \cap \overline{\check{Q}^E} \cap \overline{\text{comp } \check{Q}^E}$$

et d'après (2.13) et (2.14) on a :

$$\Xi = G \cap \overline{\check{Q}^P} \cap \overline{\check{Q}^E} \quad (2.12)$$

qui est la propriété énoncée.

Propriété 2.2.

$$\left| \Xi \subseteq G \cap \partial A \cap \partial B \right. \quad (2.15)$$

D'après (2.6) et (2.7), on a :

$$\overline{\check{Q}^P} \subseteq \overline{A} \cap \overline{\text{comp } B} \quad (2.16)$$

$$\overline{\check{Q}^E} \subseteq \overline{B} \cap \overline{\text{comp } A} \quad (2.17)$$

$$\text{D'où } \overline{\check{Q}^P} \cap \overline{\check{Q}^E} \subseteq \partial A \cap \partial B \quad (2.18)$$

$$\text{et } \Xi = G \cap \overline{\check{Q}^P} \cap \overline{\check{Q}^E} \subseteq G \cap \partial A \cap \partial B.$$

Lemme 2.1.

$$\text{Si } \overline{Q^P} = \overline{\text{comp } Q^E} \quad \text{et} \quad \overline{Q^E} = \overline{\text{comp } Q^P} \quad (2.19)$$

$$\text{alors } \partial A = \partial B = \partial Q^P = \partial Q^E \quad (2.20)$$

$$\text{et } \square = G \cap \partial A = G \cap \partial B \quad (2.21)$$

D'après (2.6) et (2.7) on a immédiatement :

$$\overline{\text{comp } A} \subseteq \overline{\text{comp } Q^P} \quad \text{et} \quad \overline{B} \subseteq \overline{\text{comp } Q^P}$$

$$\overline{\text{comp } B} \subseteq \overline{\text{comp } Q^E} \quad \text{et} \quad \overline{A} \subseteq \overline{\text{comp } Q^E}$$

D'où l'on tire :

$$\partial A \subseteq \overline{\text{comp } Q^P} \cap \overline{\text{comp } Q^E} \quad (2.22)$$

$$\partial B \subseteq \overline{\text{comp } Q^P} \cap \overline{\text{comp } Q^E} \quad (2.23)$$

D'après (2.18), (2.22), (2.23) on a :

$$\overline{Q^P} \cap \overline{Q^E} \subseteq \partial A \subseteq \overline{\text{comp } Q^P} \cap \overline{\text{comp } Q^E}$$

$$\overline{Q^P} \cap \overline{Q^E} \subseteq \partial B \subseteq \overline{\text{comp } Q^P} \cap \overline{\text{comp } Q^E}$$

L'hypothèse $\overline{Q^P} = \overline{\text{comp } Q^E}$, $\overline{Q^E} = \overline{\text{comp } Q^P}$
conduit à :

$$\partial A = \partial B = \partial Q^P = \partial Q^E = \overline{Q^P} \cap \overline{Q^E} = \overline{\text{comp } Q^P} \cap \overline{\text{comp } Q^E} \quad (2.20)$$

On en tire (2.21) immédiatement.

Il est clair que si $\bar{Q}^P = \text{comp } \bar{Q}^E$ donc
 aussi $\bar{Q}^E = \text{comp } \bar{Q}^P$, alors les conclusions (2.20)
 et (2.21) du lemme sont vérifiées.

2.5 P-TRAJETS ET E-TRAJETS.

Définitions 2.5.

Un P-trajet π_P est un trajet de point initial $x^i \in \bar{Q}^P$
 engendré par un couple $(\bar{\mu}_{x^i}, e)$, où e est une stratégie
 quelconque, $(\bar{\mu}_{x^i}, e) \in \bar{C}^P(x^i)$.

Un P-trajet π_P est optimal si $\pi_P \cap \theta^P \neq \emptyset$.

Définitions 2.6.

Un E-trajet π_E est un trajet de point initial $x^i \in \bar{Q}^E$
 engendré par un couple $(\bar{\mu}, \bar{e}_{x^i})$, où $\bar{\mu}$ est une stratégie
 quelconque, $(\bar{\mu}, \bar{e}_{x^i}) \in \bar{C}^E(x^i)$.

Un E-trajet π_E est optimal si $\pi_E \cap \theta^E \neq \emptyset$.

De ces définitions, il résulte que dans le cas (b),
 il peut exister des E-trajets, mais qu'il n'existe pas de
 E-trajet optimal.

2.6 HYPOTHESE 2.1 - LEMMES 2.2 ET 2.3.

Hypothèse 2.1.

Dans la suite de ce chapitre, nous supposons que $\theta^P \cap \theta^E = \emptyset$.

Lemme 2.2.

Si $\theta^P \cap \theta^E = \emptyset$, un P-trajet π_P n'a aucun point dans $\text{comp } \tilde{Q}^P$.

Lemme 2.3.

Si $\theta^P \cap \theta^E = \emptyset$, un E-trajet π_E n'a aucun point dans $\text{comp } \tilde{Q}^E$.

Démonstration. Soit π_P un P-trajet de point initial x^i (on a $x^i \in \tilde{Q}^P$), engendré par $(\tilde{r}_{x^i}, e)$, où e est une stratégie quelconque. Supposons qu'il existe un point $x^j \in \pi_P$ tel que $x^j \in \text{comp } \tilde{Q}^P$, et désignons par π_P^i , $\pi_P^j \subseteq \pi_P$ le trajet de point initial x^i et de point final x^j .

Notons que $x^j \notin \theta^P$ car $\theta^P \subseteq \tilde{Q}^P$. D'après (2.4), on a :

$$\text{comp } \tilde{Q}^P = \{ x^i ; \forall \mu \quad \exists e, (\mu, e) \notin \tilde{G}^P(x^i) \}$$

Soit $\hat{e}$ telle que $(\tilde{r}_{x^i}, \hat{e}) \notin \tilde{G}^P(x^i)$. D'après la définition 1.8, deux cas sont possibles, qui ne s'excluent pas l'un l'autre :

- (i) $\exists \hat{x} \in \gamma(x^j, \tilde{r}_{x^i}, \hat{e})$ telle que $\Gamma_{\hat{x}}(x^j, \tilde{r}_{x^i}, \hat{e}) \cap \theta^P = \emptyset$
- (ii) $\exists$ un trajet π_P^j , de point initial x^j , engendré par $(\tilde{r}_{x^i}, \hat{e})$, de support $\Gamma_x(x^j, \tilde{r}_{x^i}, \hat{e})$, dont le point final $x^l \in \theta^E$.

Soit $e': X \longrightarrow e'(x)$ la stratégie définie par :

$$e'(x) = \begin{cases} e(x) & \text{pour } x \text{ tel que } x_n < x_n^{\dagger} \\ \hat{e}(x) & \text{pour } x \text{ tel que } x_n \geq x_n^{\dagger} \end{cases}$$

En faisant le raccordement de $\pi_p^{i\dagger}$ et de $\Gamma_{\hat{x}}(x^{\dagger}, \hat{r}_{x^{\dagger}}, e)$ ou celui de $\pi_p^{ij\dagger}$ et de $\pi^{j\dagger}$, on a les deux cas suivants qui ne s'excluent pas l'un l'autre :

(i)' $\exists \hat{x}' \in \gamma(x^i, \hat{r}_{x^i}, e')$ telle que $\Gamma_{\hat{x}'}(x^i, \hat{r}_{x^i}, e') \cap \theta^p = \emptyset$

où $\Gamma_{\hat{x}'}(x^i, \hat{r}_{x^i}, e') = \pi_p^{ij\dagger} \cup \Gamma_{\hat{x}}(x^{\dagger}, \hat{r}_{x^{\dagger}}, \hat{e})$.

(ii)' $\exists$ un trajet $\pi^{j\dagger}$, $\pi^{j\dagger} = \pi_p^{ij\dagger} \cup \pi^{j\dagger}$, de point initial x^i , engendré par $(\hat{r}_{x^i}, e')$, dont le point final $x^{\dagger} \in \theta^E$, et dont le support $\Gamma_{x'}(x^i, \hat{r}_{x^i}, e')$ est :

$$\Gamma_{x'}(x^i, \hat{r}_{x^i}, e') = \pi_p^{ij\dagger} \cup \Gamma_x(x^{\dagger}, \hat{r}_{x^{\dagger}}, \hat{e})$$

Ces deux cas (i)' et (ii)' sont en contradiction avec $x^i \in \hat{Q}^p$, donc il n'existe pas de point $x^{\dagger} \in \pi_p$ tel que $x^{\dagger} \in \text{comp } \hat{Q}^p$ et le lemme 2.2 est démontré.

Le lemme 2.3 se démontre de la même manière.

2.7 PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE.

Nous désignerons par $\mathcal{C} \subseteq G$, l'ensemble de points x^o tels que :

$$(i) \quad x^0 \notin \theta^p \cup \theta^E$$

$$(ii) \quad x^0 \in \partial \tilde{Q}^p \cup \partial \tilde{Q}^E$$

(iii) x^0 satisfait la propriété fondamentale suivante :

Si $x^0 \in \partial \tilde{Q}^p$, alors $\exists B(x^0)$, voisinage de x^0 dans G , et $\exists \tilde{p}_{x^0}^*$ tels que $\tilde{p}_{x^0}^*$ est optimale sur $B(x^0) \cap \tilde{Q}^p$.

Si $x^0 \in \partial \tilde{Q}^E$, alors $\exists B(x^0)$, voisinage de x^0 dans G , et $\exists \tilde{e}_{x^0}^*$ tels que $\tilde{e}_{x^0}^*$ est optimale sur $B(x^0) \cap \tilde{Q}^E$.

Notons que pour tout point $x \in G$, appartenant à la frontière $\partial \Omega$ d'un sous-ensemble Ω de G , on peut trouver un voisinage $B(x)$ de ce point tel que :

$$B(x) \cap \Omega \neq \emptyset \quad (\text{de même } B(x) \cap \text{comp} \Omega \neq \emptyset).$$

Supposons en effet que $B(x) \cap \Omega = \emptyset$, on aurait alors $x \notin \overline{\Omega}$, ce qui est contraire à $x \in \partial \Omega = \overline{\Omega} \cap \overline{\text{comp} \Omega}$.

2.8 EQUATION LINEAIRE ET EQUATION ADJOINTE.

Soit $x^0 \in \Xi \cap \mathcal{E}$. Supposons que sur un voisinage de x^0 , $\tilde{p}_{x^0}^*$ et $\tilde{e}_{x^0}^*$ soient de classe C^1 ; alors il existe un trajet non nul π_{pe} , de point initial x^0 , engendré par $(\tilde{p}_{x^0}^*, \tilde{e}_{x^0}^*)$. Soit :

$$\pi_{pe} = \left\{ x ; x = x(\tau), \tau \in [0, \tau^*], x \in \gamma(x^0, \tilde{p}_{x^0}^*, \tilde{e}_{x^0}^*) \right\}$$

$x: \tau \longrightarrow x(\tau)$ est solution de

$$\frac{dx}{d\tau} = f(x, \tilde{p}_{x^0}^*(x), \tilde{e}_{x^0}^*(x)) \quad (2.24)$$

pour le point initial x^0 . On a $x(0) = x^0$.

S'il existe un voisinage de π_{pe} sur lequel $\tilde{p}_{x^0}^*$ et $\tilde{e}_{x^0}^*$ soient de classe C^1 , il existe une solution et une seule $\hat{\eta}: \tau \longrightarrow \hat{\eta}(\tau)$, $\tau \in [0, t^*]$, de l'équation linéaire :

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial \tilde{p}_{x^0}^*}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial \tilde{e}_{x^0}^*}{\partial x} \right) \bigg|_{x=x(\tau)} \cdot \eta \quad (2.25)$$

pour des conditions initiales données $\hat{\eta}(0) = \eta^0$.

$\hat{\eta}(\tau)$ est un vecteur de E^n .

Si $\eta^0 \neq 0$, alors $\hat{\eta}(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \in [0, t^*]$.

De même, s'il existe un voisinage de π_{pe} sur lequel $\tilde{p}_{x^0}^*$ et $\tilde{e}_{x^0}^*$ sont de classe C^1 , alors il existe une solution unique $\hat{\lambda}: \tau \longrightarrow \hat{\lambda}(\tau)$, $\tau \in [0, t^*]$, de l'équation adjointe de (2.25) :

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial \tilde{p}_{x^0}^*}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial \tilde{e}_{x^0}^*}{\partial x} \right)^T \bigg|_{x=x(\tau)} \cdot \lambda \quad (2.26)$$

pour des conditions initiales données $\hat{\lambda}(0) = \lambda^0$.

$\hat{\lambda}(\tau)$ est un vecteur de E^n .

Si $\lambda^0 \neq 0$, alors $\hat{\lambda}(\tau) \neq 0 \quad \tau \in [0, t^*]$.

2.9 LEMMES 2.4 ET 2.5.

Nous nous intéresserons à des trajets π_μ et π_e dont le point initial est $x^0 \in \mathcal{E}$.

Lemme 2.4.

Soit π_μ un trajet de point initial $x^0 \in \partial \bar{Q}^*$, engendré par $(\tilde{\mu}_{x^0}, e)$, où e est quelconque dans $\mathcal{E}$, représenté par :

$$\pi_\mu = \left\{ x ; x = x(\tau), \tau \in [0, t^*], x \in \gamma(x^0, \tilde{\mu}_{x^0}, e) \right\} \quad (2.27)$$

Si en tout point $x = x(\tau)$, $\tau \in [0, t^*]$, il existe un voisinage $B(x(\tau))$ sur lequel $\tilde{\mu}_{x^0}$ et e sont de classe C^1 ,

alors $\pi_\mu \subset \bar{Q}^*$.

Démonstration. Si $\pi_\mu = \pi^0$, comme $x^0 \in \partial \bar{Q}^*$, le lemme est évident. Supposons donc $\pi_\mu \neq \pi^0$.

Si $x^0 \in \bar{Q}^*$, le lemme 2.4 se déduit du lemme 2.2. Nous étudierons donc le cas où $x^0 \in \text{comp } \bar{Q}^*$.

Supposons qu'il existe un point $x' = x(\tau')$, $\tau' \in [0, t^*)$, tel que $x' \notin \bar{Q}^*$, c'est-à-dire $x' \in \text{comp } \bar{Q}^*$.

Soit $B(x^0)$ un voisinage de x^0 tel que
 $B(x^0) \cap (\theta^p \cup \theta^e) = \emptyset$ (ce qui est possible puisque
 $\pi_p \neq \pi^0$, c'est-à-dire $x^0 \notin \theta^p \cup \theta^e$, et que $\theta^p \cup \theta^e$
est fermé) et tel que $\bar{p}_{x^0}^*$ soit optimale pour J^p
sur $B(x^0) \cap \bar{Q}^p$. Comme $B(x^0) \cap \bar{Q}^p \neq \emptyset$ et
que $x^0 \in \text{comp } \bar{Q}^p$, on peut trouver un point x^i
différent de x^0 tel que :

$$x^i = x^0 + \varepsilon \eta^0 \in B(x^0) \cap \bar{Q}^p, \quad x^i \notin \theta^p \cup \theta^e \quad (2.28)$$

Soit $\Gamma_{\hat{x}}(x^i, \bar{p}_{x^0}^*, e)$ une courbe descriptive de
point initial x^i , engendrée par $(\bar{p}_{x^0}^*, e)$. Comme $\bar{p}_{x^0}^*$
et e sont de classe C^1 sur un voisinage de π_p , pour
un ε assez petit, $\hat{x} : \tau \rightarrow \hat{x}(\tau)$, $\tau \in [0, \tau^1]$,
est solution de l'équation :

$$\frac{dx}{d\tau} = f(x, \bar{p}_{x^0}^*(x), e(x)) \quad (2.29)$$

pour le point initial x^i . On a :

$$\hat{x}(\tau) = x(\tau) + \varepsilon \hat{\eta}(\tau) + o(\varepsilon, \tau) \quad \tau \in [0, \tau^1] \quad (2.30)$$

où $\frac{\|o(\varepsilon, \tau)\|}{\varepsilon} \longrightarrow 0$ uniformément en τ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

$\hat{\eta} : \tau \longrightarrow \hat{\eta}(\tau)$ est solution de l'équation :

$$\frac{d\eta}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial \tilde{f}_{x^0}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial e}{\partial x} \right) \Big|_{x=x(\tau)} \cdot \eta \quad (2.31)$$

pour la condition initiale η^0 .

D'autre part, d'après la définition d'un trajet,

$$X = x(\tau) \notin \theta^P \cup \theta^E \quad \forall \tau \in [0, \tau^1)$$

donc, $\theta^P \cup \theta^E$ étant fermé, pour tout $X = x(\tau)$, $\tau \in [0, \tau^1)$ il existe un voisinage $B(x(\tau))$ tel que :

$$B(x(\tau)) \cap (\theta^P \cup \theta^E) = \emptyset \quad \forall \tau \in [0, \tau^1)$$

De sorte que pour un ε assez petit,

$$\hat{x}(\tau) \notin \theta^P \cup \theta^E \quad \forall \tau \in [0, \tau^1)$$

Posons :

$$\hat{X}' = \hat{x}(\tau') = x(\tau') + \varepsilon \hat{\eta}(\tau') + o(\varepsilon, \tau') \quad , \quad \tau' \in [0, \tau^1) \quad (2.32)$$

D'après ce qui précède il est clair que :

$$\{x; X = \hat{x}(\tau) \quad , \quad \tau \in [0, \tau'] \quad , \quad \hat{x} \in \gamma(x^i, \tilde{f}_{x^0}^*, e)\}$$

est un trajet, soit $\hat{\pi}_\mu$.

D'après (2.28), et d'après la définition de $\hat{\mu}_{x^0}^*$,
ce trajet $\hat{\pi}_\mu$ est un P-trajet et par suite $\hat{\pi}_\mu$ n'a aucun
de ses points dans $\text{comp } \hat{Q}^P$ (lemme 2.2). En particulier
 $\hat{x}' \notin \text{comp } \hat{Q}^P$.

On a supposé $x' \in \overline{\text{comp } \hat{Q}^P}^0$; d'après (2.32), pour
un ε assez petit on doit avoir $\hat{x}' \in \overline{\text{comp } \hat{Q}^P}^0 \in \text{comp } \hat{Q}^P$
ce qui contredit le lemme 2.2. Donc il n'existe pas de
point $x' = x(\tau')$, $\tau' \in [0, \tau^+)$ du trajet π_μ
représenté par (2.27) tel que $x' \in \overline{\text{comp } \hat{Q}^P}^0$.

Comme $\theta^P \cup \theta^E$ est fermé et que $x: \tau \longrightarrow x(\tau)$
est continue à gauche en $\tau = \tau^+$, on a également
 $x(\tau^+) \notin \overline{\text{comp } \hat{Q}^P}$, c'est-à-dire $x(\tau^+) \in \hat{Q}^P$.
Donc $\pi_\mu \subset \hat{Q}^P$ et le lemme est démontré.

Lemme 2.5.

Soit π_e un trajet de point initial $x^0 \in \partial \hat{Q}^E$,
engendré par $(\mu, \hat{e}_{x^0}^*)$, où μ est quelconque
dans $\mathcal{F}^P$, représenté par :

$$\pi_e = \left\{ x ; x = x(\tau), \tau \in [0, \tau^+], x \in \gamma(x^0, \mu, \hat{e}_{x^0}^*) \right\} \quad (2.33)$$

Si en tout point $x = x(\tau)$, $\tau \in [0, \tau^+]$, il
existe un voisinage $B(x(\tau))$ sur lequel μ et $\hat{e}_{x^0}^*$
sont de classe C^1 ,

alors $\pi_e \subset \hat{Q}^E$.

La démonstration est analogue à celle du lemme 2.4.

2.10 TRAJETS APPARTENANT A Ξ .

Des deux lemmes précédents on déduit immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 2.1.

Soit π_{fe} un trajet de point initial $X^0 \in \mathcal{E} \cap \Xi$ engendré par $(\dot{x}_{x^0}^*, \ddot{x}_{x^0}^*)$, représenté par :

$$\pi_{fe} = \left\{ X ; X = x(\tau), \tau \in [0, \tau^*], x \in \gamma(x^0, \dot{x}_{x^0}^*, \ddot{x}_{x^0}^*) \right\} \quad (2.34)$$

Hypothèse 2.2.

Si en tout point $X = x(\tau)$, $\tau \in [0, \tau^*]$, il existe un voisinage $B(x(\tau))$ sur lequel $\dot{x}_{x^0}^*$ et $\ddot{x}_{x^0}^*$ sont de classe C^1 ,

$$\text{alors } \pi_{fe} \subset \Xi \quad (2.35)$$

On a $\pi_{fe} \subset G$; d'autre part d'après les lemmes 2.4 et 2.5 :

$$\pi_{fe} \subset \overline{Q^P}, \quad \pi_{fe} \subset \overline{Q^E} \implies \pi_{fe} \subset \overline{Q^P} \cap \overline{Q^E}$$

Soit, d'après (2.12) : $\pi_{fe} \subset \Xi$

Définition 2.7. Nous appellerons trajet-frontière ou Ξ -trajet, un trajet π_{fe} qui vérifie (2.35).

Remarque. D'après l'hypothèse 2.2, comme $X^0 \notin \theta^P \cup \theta^E$, il est clair qu'il existe un trajet $\pi_{fe} \neq \pi^0$.

2.11 PROPRIETES DE DEUX FAMILLES DE TRAJETS.

Soit $X^0 \in \mathcal{E}$ tel que $X^0 \in \Xi$, et soit π_{fe} un

trajet de point initial X^0 , représenté par (2.34). Supposons l'hypothèse 2.2 vérifiée, on sait alors, d'après le Corollaire 2.1, que $\pi_{\mu_e} \subset \bar{\Sigma}$.

Soit $X' \in \pi_{\mu_e}$, $X' = x(\tau')$, $\tau' \in [0, \tau^t)$. On a donc $X' \notin \theta^P \cup \theta^E$. Soit $\mu: X \longrightarrow \mu(X)$ une stratégie constante que nous désignerons par $\alpha: X \longrightarrow \alpha(X)$ telle que :

$$\mu(X) = \alpha(X) = u^b, \quad \forall X \in G \quad (2.36)$$

où u^b est un vecteur constant quelconque appartenant à K^P . Soit π_α un trajet de point initial X' , engendré par $(-\alpha, \tilde{e}_{x^0}^*)$. Comme $X' \notin \theta^P \cup \theta^E$ et que l'hypothèse 2.2 est vérifiée, il existe $\pi_\alpha \neq \pi^0$.

De même soit $e: X \longrightarrow e(X)$ une stratégie constante que nous désignerons par $\beta: X \longrightarrow \beta(X)$ telle que :

$$e(X) = \beta(X) = v^b, \quad \forall X \in G \quad (2.37)$$

où v^b est un vecteur constant quelconque appartenant à K^E . Soit π_β un trajet de point initial X' , engendré par $(\tilde{\mu}_{x^0}^*, \beta)$. Comme $X' \notin \theta^P \cup \theta^E$ et que l'hypothèse 2.2 est vérifiée, il existe $\pi_\beta \neq \pi^0$.

Etant donné $X' \in \pi_{\mu_e}$, $X' \notin \theta^P \cup \theta^E$, à l'ensemble K^P ,

nous pouvons associer une famille $\{\pi_\alpha\}$ de trajets π_α ;
à l'ensemble K^E , nous pouvons associer une famille $\{\pi_\beta\}$
de trajets π_β .

Nous allons démontrer ici deux propriétés des trajets π_α
et π_β , qui sont analogues aux propriétés (a) et (b) du
paragraphe 1.17.

Propriétés 2.3.

$$\left| \begin{array}{lll} \text{(a)} & \pi_\alpha & \subset \overline{Q^E}^* \\ \text{(b)} & \pi_\beta & \subset \overline{Q^P}^* \end{array} \right.$$

Nous démontrerons la propriété (b).

Si $\pi_\beta = \pi^\circ$, comme $X' \in \Xi$, la
propriété 2.3 (b) est évidente. Nous supposons
donc $\pi_\beta \neq \pi^\circ$.

Soit $B(X')$ un voisinage de $X' = x(\tau')$, $\tau' \in [0, \tau^f)$,
sur lequel $\tilde{p}_{x^0}^*$ est de classe C^1 . Bien entendu β est
aussi de classe C^1 . Posons :

$$\pi_\beta = \left\{ X ; X = x_\beta(\tau) , \tau \in [0, \tau^s) , x_\beta \in \gamma(X', \tilde{p}_{x^0}^*, \beta) \right\} \quad (2.38)$$

et supposons qu'il existe $X'' = x_\beta(\tau'') \in \pi_\beta$ tel
que $X'' \in B(X')$ et $X'' \notin \overline{Q^P}^*$, ou encore
 $X'' \in B(X') \cap \overline{\text{comp}} \overline{Q^P}^*$. Désignons par $B(X'')$ un
voisinage de X'' tel que :

$$B(X'') \subset B(X') \cap \overline{\text{comp}} \overline{Q^P}^* \quad (2.39)$$

La démonstration qui suit est analogue à celle du lemme 2.4 nous n'entrerons donc pas dans les détails. Soit :

$$X^i = X^o + \varepsilon \eta^o \in B(X^o) \cap \tilde{Q}^p \quad (2.40)$$

($X^o \in \mathcal{C}$, nous ne supposons pas que $X^o \in \text{comp } \tilde{Q}^p$, donc $X^i = X^o$ n'est pas exclu) ; soit $\hat{\pi}$ un trajet de point initial X^i , engendré par $(\tilde{p}_{X^o}^*, \tilde{e}_{X^o}^*)$, représenté par :

$$\hat{\pi} = \left\{ X ; X = \hat{x}(\tau) , \tau \in [0, \tau'] , \hat{x} \in \gamma(X^i, \tilde{p}_{X^o}^*, \tilde{e}_{X^o}^*) \right\} \quad (2.41)$$

Le point final de $\hat{\pi}$ est $\hat{X}' = \hat{x}(\tau') , \tau' \in [0, \tau']$.

Pour ε assez petit, $\hat{X}' \in B(X')$ et est représenté par :

$$\hat{X}' = \hat{x}(\tau') = x(\tau') + \varepsilon \hat{\eta}(\tau') + o(\varepsilon, \tau') \in B(X') \quad (2.42)$$

où $\frac{\|o(\varepsilon, \tau')\|}{\varepsilon} \longrightarrow 0$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

et où $\hat{\eta} : \tau \longrightarrow \eta = \hat{\eta}(\tau)$ est solution de l'équation (2.25) et satisfait la condition initiale $\hat{\eta}(0) = \eta^o$.

Comme $X^i \in \tilde{Q}^p$, d'après le lemme 2.2, la propriété (iii) du paragraphe 2.7 et (2.40), on a $\hat{X}' \in \tilde{Q}^p$. Soit finalement, en tenant compte de (2.42) :

$$\hat{X}' \in B(X') \cap \tilde{Q}^p \quad (2.43)$$

Pour ε assez petit, $\hat{X}' \notin \theta^p \cup \theta^E$ si $X' \notin \theta^p \cup \theta^E$.
D'après (2.43) et l'hypothèse 2.2, il existe dans $B(X')$
un trajet non nul $\hat{\pi}_\beta$, de point initial $\hat{X}'$, engendré
par $(\hat{\nu}_{X^0}^*, \beta)$, représenté par :

$$\hat{\pi}_\beta = \left\{ X ; X = \hat{x}_\beta(\tau), \tau \in [0, \tau''] , \hat{x}_\beta \in \gamma(\hat{X}', \hat{\nu}_{X^0}^*, \beta) \right\} \quad (2.44)$$

Soit $\hat{X}'' = \hat{x}_\beta(\tau'')$ le point final de $\hat{\pi}_\beta$. D'après
(2.42), (2.39) et d'après l'hypothèse 2.2, on a :

$$\hat{X}'' \in B(X'') \subset \overbrace{\text{comp } \hat{Q}^p}^o \quad (2.45)$$

Considérons maintenant $\hat{\pi} \cup \hat{\pi}_\beta$. C'est un trajet de
point initial X^i , de point final $\hat{X}''$ et engendré
par $(\hat{\nu}_{X^0}^*, \hat{e})$ où :

$$\hat{e}(X) = \begin{cases} \hat{e}_{X^0}^*(X) & \text{pour } X \text{ tel que } X_n < X'_n \\ \beta(X) = v^b & \text{pour } X \text{ tel que } X_n \geq X'_n \end{cases}$$

D'après (2.40) et d'après la définition de $\hat{\nu}_{X^0}^*$ (cf. § 2.7)
 $\hat{\pi} \cup \hat{\pi}_\beta$ est un P-trajet et n'a aucun de ses points dans
 $\text{comp } \hat{Q}^p$. En particulier :

$$\hat{X}'' \notin \text{comp } \hat{Q}^p$$

ce qui est en contradiction avec (2.45). Donc il n'existe pas
de point de π_β tel que $X'' \notin \overline{\hat{Q}^p}$, c'est-à-dire que :

$$\pi_\beta \cap \overbrace{\text{comp } \hat{Q}^p}^o = \emptyset$$

ou encore :

$$\pi_{\beta} \subset \overline{Q^*P}$$

qui est la propriété 2.3 (b).

La démonstration de la propriété 2.3 (a) est analogue.

2.12 LEMME 2.6.

Dans les paragraphes suivants, nous ferons l'hypothèse 2.3 concernant la frontière $\square$.

Hypothèse 2.3.

- (i) on peut représenter analytiquement $\square$ par l'équation

$$g(x) = 0$$
- (ii) en tout point $X' = x(\tau')$ d'un trajet π_{pe} , représenté par (2.34) et de point initial $x^0 \in \mathcal{C} \cap \square$, tel que $X' \notin \theta^P \cup \theta^E$, il existe un voisinage $B(X')$ sur lequel la fonction $g : X \longrightarrow g(x)$ est de classe C^1 et $\text{grad } g(x)$ est défini et différent de zéro.
- (iii) de plus

$$\begin{array}{ll} g(x) \geq 0 & \text{pour tout } x \in \overline{Q^*P} \cap B(X') \\ g(x) \leq 0 & \text{pour tout } x \in \overline{Q^*E} \cap B(X') \end{array}$$

Supposons $X' \in \pi_{pe}$ tel que $X' \notin \theta^P \cup \theta^E$.

Alors comme nous l'avons déjà vu, il existe $\pi_{\beta} \neq \pi^0$, de point initial X' , engendré par $(\tilde{\mu}_{x^0}^*, \beta)$, représenté par (2.38). Soit $B(X')$ un voisinage de X' sur lequel

les hypothèses 2.2 et 2.3 sont vérifiées. Pour tout point $X = x_p(\tau)$ tel que :

$$x_p(\tau) \in \pi_p \cap B(x') \quad (2.46)$$

posons :

$$\Delta x_p(\tau) \triangleq x_p(\tau) - x' \quad (2.47)$$

$$x_p(\tau) = x' + \Delta x_p(\tau) \quad (2.47)'$$

Comme $x_p : \tau \longrightarrow X = x_p(\tau)$ est continue en τ dans $B(x')$, il en est de même de $\Delta x_p : \tau \longrightarrow \Delta x_p(\tau)$.
On a :

$$\|\Delta x_p(\tau)\| \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \tau \longrightarrow 0$$

$$x_p(0) = x' \quad \text{et} \quad \Delta x_p(0) = 0$$

D'après la propriété 2.3 (b) et l'hypothèse 2.3, en tout point $x_p(\tau)$ vérifiant (2.46), on a :

$$g(x_p(\tau)) = g(x' + \Delta x_p(\tau)) \geq 0 \quad (2.48)$$

D'autre part $x' \in \boxed{\square}$, donc :

$$g(x') = 0$$

et (2.48) s'écrit :

$$g(x_p(\tau)) = \left. \text{grad } g(x) \right|_{x'=x(\tau)} \cdot \Delta x_p(\tau) + o(\|\Delta x_p(\tau)\|) \geq 0 \quad (2.49)$$

où $\frac{o(\|\Delta x_p(\tau)\|)}{\|\Delta x_p(\tau)\|} \longrightarrow 0$ quand $\|\Delta x_p(\tau)\| \longrightarrow 0$

En divisant (2.49) par $\tau > 0$, on obtient :

$$\left. \text{grad } g(x) \right|_{x'} \cdot \frac{\Delta x_p(\tau)}{\tau} + \frac{o(\|\Delta x_p(\tau)\|)}{\tau} \geq 0$$

$$\frac{o(\|\Delta x_p(\tau)\|)}{\tau} = \frac{o(\|\Delta x_p(\tau)\|)}{\|\Delta x_p(\tau)\|} \cdot \frac{\|\Delta x_p(\tau)\|}{\tau} \longrightarrow 0 \text{ quand } \tau \longrightarrow 0$$

D'après les propriétés de $x_p \in \gamma(x', \tilde{f}_{x^0}^*, \beta)$
et (2.47) :

$$\frac{\Delta x_p(\tau)}{\tau} \longrightarrow f(x', \tilde{f}_{x^0}^*(x'), \beta(x')) \text{ quand } \tau \longrightarrow 0$$

$$\beta(x') = v^b \in K^E$$

Le trajet π_p est quelconque c'est-à-dire que v^b est quelconque dans K^E ; finalement (2.49) conduit à :

$$\text{grad } g(x) \Big|_{x'} \cdot f(x', \bar{p}_{x^0}^*(x'), v^b) \geq 0 \quad (2.50)$$

$$\forall x' \in \pi_{pe} \text{ tel que } x' \notin \theta^p \cup \theta^E, \quad \forall v^b \in K^E$$

Par une démonstration analogue, on tire de la propriété 2.3 (a) :

$$\text{grad } g(x) \Big|_{x'} \cdot f(x', u^b, \bar{e}_{x^0}^*(x')) \leq 0 \quad (2.51)$$

$$\forall x' \in \pi_{pe} \text{ tel que } x' \notin \theta^p \cup \theta^E, \quad \forall u^b \in K^p$$

Comme $\pi_{pe} \subset \Xi$, nous tirons de (2.50) et (2.51) :

$$\text{grad } g(x) \Big|_{x'} \cdot f(x', \bar{p}_{x^0}^*(x'), \bar{e}_{x^0}^*(x')) = 0 \quad (2.52)$$

$$\forall x' \in \pi_{pe} \text{ tel que } x' \notin \theta^p \cup \theta^E.$$

Ces résultats sont résumés dans le lemme suivant :

Lemme 2.6. Soit π_{pe} un trajet de point initial $x^0 \in \mathcal{C} \cap \Xi$ engendré par $(\bar{p}_{x^0}^*, \bar{e}_{x^0}^*)$ et représenté par (2.34), Si les hypothèses 2.2 et 2.3 sont vérifiées, alors, en tout point $X = x(\tau) \in \pi_{pe}$ tel que $X \notin \theta^p \cup \theta^E$, on a :

$$\begin{aligned} \max_{u \in K^p} n(x) \cdot f(x, u, \bar{e}_{x^0}^*(x)) &= \min_{v \in K^E} n(x) \cdot f(x, \bar{p}_{x^0}^*(x), v) \\ &= n(x) \cdot f(x, \bar{p}_{x^0}^*(x), \bar{e}_{x^0}^*(x)) = 0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{où } n(x) = \text{grad } g(x) \end{array} \right. .$$

2.13 GRADIENT ET VECTEUR ADJOINT.

Soit $x^0 \in \mathcal{E} \cap \Xi$ et $B(x^0)$ un voisinage de x^0 pour lequel on a la propriété fondamentale (iii) du paragraphe 2.7. Supposons que :

$$B(x^0) \cap (\theta^p \cup \theta^e) = \emptyset \quad (2.54)$$

Soit π_{pe} un trajet de point initial x^0 , engendré par $(\dot{x}_{x^0}^*, \dot{e}_{x^0}^*)$ et représenté par (2.34). Supposons l'hypothèse 2.2 vérifiée, alors $\pi_{pe} \subset \Xi$. Nous supposerons aussi que l'hypothèse 2.3 est vérifiée.

Comme $\text{grad } g(x)$ est défini et différent de zéro en tout point $x \in \pi_{pe}$, $x \notin \theta^p \cup \theta^e$, on peut trouver pour tout x , et en particulier pour x^0 , $(n-1)$ points $\hat{x}^0 \in B(x^0) \cap \Xi$ tels que :

$$\hat{x}^0 = x^0 + \varepsilon \eta^0 + o(\varepsilon) \quad (2.55)$$

où $\frac{\|o(\varepsilon)\|}{\varepsilon} \longrightarrow 0$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, $\varepsilon > 0$

et où les $(n-1)$ vecteurs η^0 correspondants sont linéairement indépendants et satisfont à :

$$\left. \text{grad } g(x) \right|_{x^0} \cdot \eta^0 = 0 \quad (2.56)$$

Et à tout point $\hat{X}^0$ défini par (2.55) avec $\varepsilon > 0$, on peut associer un autre point de $B(X^0) \cap \bar{U}$, défini également par (2.55) mais avec $\varepsilon < 0$, le vecteur η^0 étant le même.

D'après la définition de l'ensemble $\mathcal{E}$ et d'après (2.54), il est clair que $\hat{X}^0 \in \mathcal{E}$. Comme l'hypothèse 2.2 est vérifiée, il existe $\pi_{\tau_e} \neq \pi^0$, de point initial $\hat{X}^0$, engendré par $(\check{\nu}_{X^0}, \check{e}_{X^0})$, de support $\Gamma_{\hat{X}}(\hat{X}^0, \check{\nu}_{X^0}, \check{e}_{X^0})$.

Soit $\hat{\eta} : \tau \longrightarrow \eta = \hat{\eta}(\tau)$, $\tau \in [0, \tau^t]$, solution de l'équation (2.25) pour la condition initiale $\hat{\eta}(0) = \eta^0$. D'après l'hypothèse 2.2, une telle solution existe.

Considérons maintenant $\hat{\lambda} : \tau \longrightarrow \lambda = \hat{\lambda}(\tau)$, $\tau \in [0, \tau^t]$, solution de l'équation (2.26) pour la condition initiale $\hat{\lambda}(0) = \lambda^0$ (que nous préciserons plus loin). On voit facilement que :

$$\frac{d}{d\tau} (\hat{\lambda}(\tau) \cdot \hat{\eta}(\tau)) = 0 \quad \tau \in [0, \tau^t] \quad (2.57)$$

Soit $X' = x(\tau')$ un point quelconque de π_{τ_e} , tel que $X' \notin \theta^p \cup \theta^e$. Cela sera réalisé si $\tau' \in [0, \tau^t]$. Alors pour un ε assez petit, on a :

$$\hat{X}' = \hat{x}(\tau') = X' + \varepsilon \hat{\eta}(\tau') + o(\varepsilon, \tau') \notin \theta^p \cup \theta^e \quad (2.58)$$

où $\frac{\|o(\varepsilon, \tau')\|}{\varepsilon} \longrightarrow 0$ uniformément en τ' quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Posons $\hat{\eta}(\tau') = \eta'$.

D'après le corollaire 2.1,

$$\hat{\pi}|_E \subset \overline{E}$$

et d'après l'hypothèse 2.3,

$$\begin{aligned} g(x') &= 0 & x' &= x(\tau') \\ g(\hat{x}') &= 0 & \hat{x}' &= \hat{x}(\tau') \end{aligned} \quad \forall \tau' \in [0, \tau_f) \quad (2.59)$$

D'autre part, d'après (2.58) et l'hypothèse 2.3 (ii),
on a :

$$g(\hat{x}') = g(x') + \left. \text{grad } g(x) \right|_{x'} \cdot (\varepsilon \eta' + o(\varepsilon, \tau')) + o(\|\varepsilon \eta' + o(\varepsilon, \tau')\|)$$

ou encore :

$$g(\hat{x}') - g(x') = \varepsilon \left. \text{grad } g(x) \right|_{x'} \cdot \eta' + o(\varepsilon, \tau')$$

où $\frac{\|o(\varepsilon, \tau')\|}{\varepsilon} \longrightarrow 0$ uniformément en τ' lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$

D'après (2.59) :

$$\varepsilon \left. \text{grad } g(x) \right|_{x'} \cdot \eta' + o(\varepsilon, \tau') = 0 \quad (2.60)$$

Soit, en divisant par ε et en faisant $\varepsilon \longrightarrow 0$:

$$\left. \text{grad } g(x) \right|_{x'} \cdot \eta' = 0 \quad (2.61)$$

Cette relation (2.61) est vraie pour $(n-1)$ vecteurs η' linéairement indépendants et en tout point $x' = x(\tau') \in \pi_{pe}$ tel que $x' \notin \theta^p \cup \theta^e$; donc :

$$\left. \text{grad } g(x) \right|_{x=x(\tau)} \cdot \hat{\eta}(\tau) = 0 \quad \forall \tau \in [0, \tau^f) \quad (2.62)$$

En comparant (2.57) et (2.62), nous voyons que si λ^o est orthogonal au plan tangent à Ξ en X^o , c'est-à-dire si λ^o et $\left. \text{grad } g(x) \right|_{x^o}$ ont même support, alors le vecteur $\hat{\lambda}(\tau)$ est orthogonal au plan tangent à Ξ en tout point $x = x(\tau) \in \pi_{pe}$, $\tau \in [0, \tau^f)$.

Le vecteur fonction $\hat{\lambda} : \tau \longrightarrow \lambda = \hat{\lambda}(\tau)$, $\tau \in [0, \tau^f]$, solution de (2.26) est un vecteur continu non nul et si à $\tau=0$, λ^o et $\left. \text{grad } g(x) \right|_{x^o}$ sont co-directionnels, alors les vecteurs $\hat{\lambda}(\tau)$ et $\left. \text{grad } g(x) \right|_{x=x(\tau)}$ sont co-directionnels le long du trajet π_{pe} , en tout point $x = x(\tau)$ tel que $x \notin \theta^p \cup \theta^e$.

2.14 CONDITIONS DE TRANSVERSALITE.

Soit π_{pe} un trajet représenté par (2.34), de point initial $x^0 \in \mathcal{C} \cap \Xi$, engendré par $(\tilde{p}_{x^0}^*, \tilde{e}_{x^0}^*)$, pour lequel l'hypothèse 2.2 est vérifiée. On a donc $\pi_{pe} \subset \Xi$.

Nous supposons que :

Hypothèse 2.4. $B(x^0) \cap \overline{\tilde{Q}^P}$ et $B(x^0) \cap \overline{\tilde{Q}^E}$ forment une partition de $B(x^0)$.

Supposons que $x^{\dagger} = x(\tau^{\dagger}) \in \theta^P \cup \theta^E$. Comme $\theta^P \cap \theta^E = \emptyset$, $x^{\dagger}$ n'appartient qu'à une des deux cibles ; supposons $x^{\dagger} \in \theta^P$. Nous ferons sur la frontière de θ^P l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2.5.

(i) on peut représenter analytiquement $\partial\theta^P$ par l'équation :

$$h(x) = 0$$

(ii) il existe un voisinage $B(x^{\dagger})$ de $x^{\dagger} = x(\tau^{\dagger})$, sur lequel la fonction $h: x \longrightarrow h(x)$ est de classe C^1 et $\text{grad } h(x)$ est défini et différent de zéro.

Choisissons λ^0 et $\text{grad } g(x) \big|_{x^0}$ co-directionnels en x^0 et posons $\lambda^{\dagger} = \hat{\lambda}(\tau^{\dagger})$ en $x^{\dagger} = x(\tau^{\dagger})$. Nous allons montrer que $\lambda^{\dagger}$ est alors normal à $\partial\theta^P$ en $x^{\dagger}$.

D'après l'hypothèse 2.5, on peut trouver $(n-1)$ points $\hat{x}^f \in B(x^f) \cap \partial\theta^f$ tels que :

$$\hat{x}^f = x^f + \varepsilon \eta^f + o(\varepsilon) \quad (2.63)$$

où $\frac{\|o(\varepsilon)\|}{\varepsilon} \longrightarrow 0$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, $\varepsilon > 0$

et où les $(n-1)$ vecteurs η^f correspondants sont linéairement indépendants et satisfont à :

$$\left. \text{grad } h(x) \right|_{x^f} \cdot \eta^f = 0 \quad (2.64)$$

Et à tout point $\hat{x}^f$ défini par (2.63) avec $\varepsilon > 0$, on peut associer un autre point de $B(x^f) \cap \partial\theta^f$, défini également par (2.63), mais avec $\varepsilon < 0$, le vecteur η^f étant le même.

Pour montrer que λ^f est normal à $\partial\theta^f$ en x^f , nous allons montrer que $\lambda^f \cdot \eta^f = 0$ pour tous les vecteurs η^f . Supposons donc qu'il existe un η^f tel que :

$$\lambda^f \cdot \eta^f \neq 0 \quad (2.65)$$

et nous considérerons les $\hat{\chi}^{\dagger}$ définis par (2.63),

avec $\varepsilon > 0$ si $\lambda^{\dagger} \cdot \eta^{\dagger} < 0$,

avec $\varepsilon < 0$ si $\lambda^{\dagger} \cdot \eta^{\dagger} > 0$

de sorte que :

$$\varepsilon(\lambda^{\dagger} \cdot \eta^{\dagger}) < 0 \quad (2.66)$$

Puisque l'hypothèse 2.2 est satisfaite en tout point de π_{pe} , en particulier en $\chi^{\dagger}$, il existe $\hat{\chi} : \tau \longrightarrow \chi = \hat{\chi}(\tau)$, $\tau \in [0, \tau^{\dagger}]$ solution de l'équation (2.24) qui satisfait la condition finale $\hat{\chi}^{\dagger} = \hat{\chi}(\tau^{\dagger})$, engendrée par $(\hat{\chi}_{x^0}^*, \hat{e}_{x^0}^*)$. Pour $\tau = 0$, on a $\hat{\chi}(0) = \hat{\chi}^0$. Pour un ε assez petit dans (2.63) on a :

$$\hat{\chi}(\tau) = \chi(\tau) + \varepsilon \hat{\eta}(\tau) + o(\varepsilon, \tau), \quad \tau \in [0, \tau^{\dagger}] \quad (2.67)$$

où $\frac{\|o(\varepsilon, \tau)\|}{\varepsilon} \longrightarrow 0$ uniformément en τ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$

et où $\hat{\eta} : \tau \longrightarrow \eta = \hat{\eta}(\tau)$, $\tau \in [0, \tau^{\dagger}]$ est solution de l'équation (2.25) pour la condition finale $\hat{\eta}(\tau^{\dagger}) = \eta^{\dagger}$.

Pour $\tau = 0$, en posant $\hat{z}(0) = z^0$:

$$\hat{x}(0) = \hat{x}^i = x^0 + \varepsilon z^0 + o(\varepsilon) \quad (2.68)$$

où $\frac{\|o(\varepsilon)\|}{\varepsilon} \longrightarrow 0$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

D'après (2.68) et l'hypothèse 2.3 :

$$g(\hat{x}^i) = g(x^0) + \varepsilon \left. \text{grad } g(x) \right|_{x^0} \cdot z^0 + o(\varepsilon)$$

$$g(x^0) = 0$$

soit :

$$g(\hat{x}^i) = \varepsilon \left. \text{grad } g(x) \right|_{x^0} \cdot z^0 + o(\varepsilon) \quad (2.69)$$

Pour un ε suffisamment petit, le second membre de (2.69) est du signe de $\varepsilon \left. \text{grad } g(x) \right|_{x^0} \cdot z^0$, c'est-à-dire du signe de $\varepsilon \lambda^0 \cdot z^0$. L'équation (2.26) est l'équation adjointe de (2.25), par suite :

$$\hat{\lambda}(\tau) \cdot \hat{z}(\tau) = c^k, \quad \tau \in [0, \tau^f] \quad (2.70)$$

donc $\lambda^0 \cdot z^0$ est du signe de $\lambda^f \cdot z^f$; et d'après (2.66)

et (2.69) :

$$g(\hat{x}^i) < 0 \quad (2.71)$$

D'après les hypothèses 2.3 et 2.4, on déduit de (2.71) :

$$\hat{x}^i \in \overset{0}{Q}^E \cap B(x^0) \quad (2.72)$$

Comme $x^0 \notin \theta^p \cup \theta^E$, pour un ε assez petit dans (2.63) et (2.66) on a :

$$\hat{x}^i \notin \theta^p \cup \theta^E$$

et d'une manière générale :

$$\hat{x}(\tau) \notin \theta^p \cup \theta^E \quad \tau \in [0, \tau^f) \quad (2.73)$$

Donc : $\{x; x = \hat{x}(\tau), \tau \in [0, \tau^f]\}$ est un trajet de point initial $\hat{x}^i$, engendré par $(\tilde{p}_{x^0}, \tilde{e}_{x^0})$.

D'après (2.72) et la propriété fondamentale de x^0

(cf. § 2.7), c'est un E-trajet que nous désignerons par $\hat{\pi}_E$.

Le point final de $\hat{\pi}_E$ est $x^f = \hat{x}(\tau^f) \in \theta^p$

(car $\hat{x}^f \in \partial\theta^p$ et θ^p fermé).

Par définition d'un E-trajet, $\hat{x}^f \in \theta^p$ est impossible.

Donc (2.65) est impossible et $\lambda^{\dagger}$ est normal à $\partial\theta^{\tau}$ en $x^{\dagger}$.

Supposons de plus que :

$$h(x) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in \theta^{\tau}$$

Nous allons montrer que $\lambda^{\dagger}$ et $\left. \text{grad } h(x) \right|_{x^{\dagger}}$ sont co-directionnels, c'est-à-dire que :

$$\lambda^{\dagger} = k \left. \text{grad } h(x) \right|_{x^{\dagger}} \quad \text{avec } k > 0$$

Pour cela nous allons montrer que :

$$\lambda^{\dagger} = k' \left. \text{grad } h(x) \right|_{x^{\dagger}} \quad \text{avec } k' < 0 \quad (2.65)'$$

est impossible. Posons :

$$\eta^{\dagger} = \left. \text{grad } h(x) \right|_{x^{\dagger}}$$

il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout ε , $0 < \varepsilon < \alpha$,

$$\tilde{x}^{\dagger} = x^{\dagger} + \varepsilon \eta^{\dagger} \in \theta^{\tau} \quad (2.63)'$$

$$\lambda^{\dagger} \cdot \eta^{\dagger} < 0 \quad (2.66)'$$

D'après l'hypothèse 2.2, pour ε assez petit dans (2.63)', il existe $\tilde{x} : \tau \longrightarrow x = \tilde{x}(\tau)$, $\tau \in [0, \tau^{\dagger}]$, solution de l'équation (2.24) qui satisfait la condition finale $\tilde{x}(\tau^{\dagger}) = \tilde{x}^{\dagger}$.
Pour $\tau = 0$, on a :

$$\tilde{x}(0) = \tilde{x}^i = x^0 + \varepsilon \tilde{\eta}(0) + o(\varepsilon) \quad (2.68)'$$

où $\frac{\|o(\varepsilon)\|}{\varepsilon} \longrightarrow 0$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$

et où $\tilde{\eta} : \tau \longrightarrow \tilde{\eta}(\tau)$, $\tau \in [0, \tau^f]$, est solution de l'équation (2.25) pour la condition finale $\tilde{\eta}(\tau^f) = \eta^f$.

On pose $\tilde{\eta}(0) = \eta^0$. On a :

$$g(\tilde{x}^i) = g(x^0 + \varepsilon \eta^0 + o(\varepsilon))$$

$$g(x^0) = 0$$

et d'après l'hypothèse 2.3 :

$$g(\tilde{x}^i) = \varepsilon \left. \text{grad} g(x) \right|_{x^0} \cdot \eta^0 + o(\varepsilon) \quad (2.69)'$$

où $\frac{|o(\varepsilon)|}{\varepsilon} \longrightarrow 0$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Pour ε assez petit, le second membre de (2.69)' est du signe de $\varepsilon \left. \text{grad} g(x) \right|_{x^0} \cdot \eta^0$, c'est-à-dire du signe de $\varepsilon \lambda^0 \cdot \eta^0$.

On a $\varepsilon > 0$ et :

$$\hat{\lambda}(\tau) \cdot \tilde{\eta}(\tau) = c_k \quad \tau \in [0, \tau^f] \quad (2.70)'$$

donc, d'après (2.66)', (2.69)' et (2.70)' :

$$g(\tilde{x}^i) < 0 \quad (2.71)'$$

ce qui, d'après les hypothèses 2.3 et 2.4, conduit à :

$$\tilde{x}^i \in \overset{\circ}{Q}^\varepsilon \cap B(x^0) \quad (2.72)'$$

En poursuivant le raisonnement comme ci-dessus, on montre que (2.72)' conduit à une contradiction. Donc (2.65)' est impossible et $\lambda^{\dagger}$ et $\left. \text{grad } h(x) \right|_{x^{\dagger}}$ sont co-directionnels.

2.15 PRINCIPE DU MINIMAX - THEOREME 2.1.

Théorème 2.1. Soit π_{pe} un trajet de point initial

$x^0 \in \mathcal{C} \cap \Xi$, engendré par $(\tilde{p}_{x^0}^*, \tilde{e}_{x^0}^*)$, stratégies définies dans le paragraphe 2.8, représenté par :

$$\pi_{pe} = \left\{ x; x = x(\tau), \tau \in [0, \tau^{\dagger}], x \in \gamma(x^0, \tilde{p}_{x^0}^*, \tilde{e}_{x^0}^*) \right\} \quad (2.34)$$

1. Si les hypothèses 2.2 et 2.3 sont vérifiées,

alors $\pi_{pe} \subset \Xi$ (corollaire 2.1)

et il existe un vecteur continu non nul $\hat{\lambda} : \tau \longrightarrow \hat{\lambda}(\tau)$, $\tau \in [0, \tau^{\dagger}]$, solution de l'équation (2.26) tel que :

$$\begin{aligned} (a) \quad \max_{u \in K^p} \hat{\lambda}(\tau) \cdot f(x, u, \tilde{e}_{x^0}^*(x)) &= \min_{v \in K^q} \hat{\lambda}(\tau) \cdot f(x, \tilde{p}_{x^0}^*(x), v) \\ &= \hat{\lambda}(\tau) \cdot f(x, \tilde{p}_{x^0}^*(x), \tilde{e}_{x^0}^*(x)) \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$(b) \quad \hat{\lambda}(\tau) \cdot f(x, \tilde{p}_{x^0}^*(x), \tilde{e}_{x^0}^*(x)) = 0 \quad (2.75)$$

en tout point $x = x(\tau) \in \pi_{pe}$, $\tau \in [0, \tau^{\dagger}]$.

2. Si les hypothèses 2.2 - 2.5, sont vérifiées,

si $\theta^p \cap \theta^e = \emptyset$,

si le point final $x^f = x(\tau^f)$ de π_{pe} appartient
à θ^p (ou à θ^e)

si $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in \theta^p$ (ou $h(x) \leq 0$ pour
tout $x \in \theta^e$)

alors $\lambda^f = \hat{\lambda}(\tau^f)$ est normal au plan tangent à $\partial\theta^p$
(ou à $\partial\theta^e$) au point x^f et :

$$\lambda^f = k \operatorname{grad} h(x) \Big|_{x^f} \quad \text{avec} \quad k > 0$$

Démonstration. Si $x^f \notin \theta^p \cup \theta^e$, le théorème 2.1 n'a pas de partie 2. Sa partie 1 n'est autre que le lemme 2.6 dans lequel $n(x) = \operatorname{grad} g(x)$ est remplacé par $\hat{\lambda}(\tau)$, ce qui est possible car $\hat{\lambda}(\tau)$ et $\operatorname{grad} g(x)$ sont co-directionnels le long de π_{pe} , en tout point $X = x(\tau)$ tel que $x \notin \theta^p \cup \theta^e$ (cf. § 2.13).

Supposons donc $x^f = x(\tau^f) \in \theta^p$. Les relations (2.74) et (2.75) sont vraies pour tout $X = x(\tau) \in \pi_{pe}$ tel que $x \notin \theta^p \cup \theta^e$, soit pour $\tau \in [0, \tau^f)$. Comme f est de classe C^1 sur un voisinage de π_{pe} , les fonctions $x: \tau \longrightarrow X = x(\tau)$ et $\hat{\lambda}: \tau \longrightarrow \lambda = \hat{\lambda}(\tau)$ sont des fonctions continues de τ sur $[0, \tau^f]$. De sorte que si p et e sont deux stratégies de classe C^1

dans un voisinage de π_{pe} , la fonction $\hat{\mathcal{H}} : \tau \longrightarrow \hat{\mathcal{H}}(\tau)$,
définie par :

$$\hat{\mathcal{H}}(\tau) \triangleq \hat{\lambda}(\tau) \cdot f(x(\tau), r(x(\tau)), e(x(\tau))) \quad (2.76)$$

est une fonction continue de τ sur $[0, \tau^{\dagger}]$.

En particulier, $\hat{r}_{x^0}^*$, $\hat{e}_{x^0}^*$, u , v sont de
classe C^1 dans un voisinage de π_{pe} et les relations
(2.74) et (2.75) sont obtenues par continuité
en $\tau = \tau^{\dagger}$, $x = x^{\dagger}$.

Nous noterons parfois :

$$\mathcal{H}(\lambda, x, u, v) \triangleq \lambda \cdot f(x, u, v) \quad (2.76)'$$

La partie 2 a été démontrée dans le paragraphe
précédent (§ 2.14)

2.16 CONTRAINTES ET EQUATION ADJOINTE.

Rappelons que K^P et K^E sont des sous-ensembles constants de U et V respectivement. Ce sont les ensembles de valeurs des stratégies admissibles p et e . En un point X on a :

$$p(X) = u \in K^P \quad u = (u_1, \dots, u_r) \in E^r$$

$$e(X) = v \in K^E \quad v = (v_1, \dots, v_s) \in E^s$$

Supposons ces ensembles K^P et K^E définis par :

$$\varphi_i(u) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, r' \quad ; \quad r' \leq r \quad (2.77)$$

$$\psi_i(v) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, s' \quad ; \quad s' \leq s \quad (2.78)$$

où $\varphi_i : u \longrightarrow \varphi_i(u)$, $i = 1, 2, \dots, r'$,

et $\psi_i : v \longrightarrow \psi_i(v)$, $i = 1, 2, \dots, s'$,

sont de classe C^1 sur U et V respectivement.

Les hypothèses étant celles du théorème 2.1, supposons que

$$\varphi_i(\tilde{h}_{x_0}^*(x(\tau))) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, r'' \quad ; \quad r'' \leq r' \quad (2.79)$$

$$\psi_i(\tilde{e}_{x_0}^*(x(\tau))) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, s'' \quad ; \quad s'' \leq s' \quad (2.80)$$

en $X = x(\tau) \in \pi_{\mu e}$.

Il résulte alors des équations (2.74) du théorème 2.1 et de (2.79) et (2.80), que en $X = x(\tau)$:

$$\sum \frac{\partial f}{\partial u} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0 \quad (2.81)$$

$$\sum \frac{\partial f}{\partial v} + \nu \frac{\partial \psi}{\partial v} = 0 \quad (2.82)$$

où

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right) \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, r \end{array}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial v_j} \right) \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, s \end{array}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} \right) \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, r' \\ j = 1, 2, \dots, r \end{array}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} = \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial v_j} \right) \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, s' \\ j = 1, 2, \dots, s \end{array}$$

sont évaluées en $X = x(\tau)$,
et où

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n''}, 0, \dots, 0)$$

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{s''}, 0, \dots, 0)$$

D'après (2.77) - (2.80), $X = x(\tau)$ est un point
d'extrémum de $\varphi_i(\bar{h}_{x^0}(X))$, $i = 1, \dots, n''$ et de $\psi_i(\bar{e}_{x^0}(X))$
 $i = 1, \dots, s''$, de sorte que :

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} \cdot \frac{(\partial \bar{h}_{x^0})_j}{\partial x_k} = 0 \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n'' \\ k = 1, \dots, n \end{array}$$

$$\sum_{j=1}^v \frac{\partial \psi_i}{\partial v_j} \cdot \frac{(\partial \bar{e}_{x^0})_j}{\partial x_k} = 0 \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, s'' \\ k = 1, \dots, n \end{array}$$

d'où l'on tire :

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \bar{h}_{x^0}}{\partial x} = 0 \quad (2.83)$$

$$\gamma \frac{\partial \psi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \bar{e}_{x^0}}{\partial x} = 0 \quad (2.84)$$

L'équation adjointe (2.26) peut encore s'écrire :

$$\frac{d\tilde{\lambda}}{d\tau} = - \tilde{\lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial \tilde{x}_0}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial \tilde{e}_{x_0}}{\partial x} \right) \Bigg|_{x=x(\tau)} \quad (2.85)$$

où $\frac{d\tilde{\lambda}}{d\tau}$ est le vecteur ligne $\left(\frac{d\lambda_1}{d\tau}, \dots, \frac{d\lambda_n}{d\tau} \right)$

Et d'après (2.81) et (2.82), l'équation (2.85) s'écrit :

$$\frac{d\tilde{\lambda}}{d\tau} = - \tilde{\lambda} \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \tilde{x}_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \tilde{e}_{x_0}}{\partial x} \quad \text{en } x = x(\tau)$$

Soit finalement d'après (2.83) et (2.84) :

$$\frac{d\tilde{\lambda}}{d\tau} = - \tilde{\lambda} \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{en } x = x(\tau)$$

ou encore :

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \Bigg|_{x=x(\tau)} \cdot \lambda \quad (2.86)$$

L'équation (2.26) qui intervient dans l'énoncé du théorème 2.1 se réduit à la forme plus simple (2.86).

Dans le cas où les ensembles K^p et K^E dépendent de $X \in G$, et sont définis respectivement par :

$$\varphi_i(x, u) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, r' \quad ; \quad r' \leq r$$

$$\psi_i(x, v) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, s' \quad ; \quad s' \leq s$$

où φ_i , $i = 1, \dots, r'$ et ψ_i , $i = 1, \dots, s'$, sont de classe C^1 sur $G \times U$ et $G \times V$ respectivement,

si en $X = x(\tau) \in \pi_{pe}$,

$$\varphi_i(x(\tau), \dot{x}_0^*(x(\tau))) = 0 \quad i = 1, \dots, r'' \quad ; \quad r'' \leq r'$$

$$\psi_i(x(\tau), \dot{e}_{x_0}^*(x(\tau))) = 0 \quad i = 1, \dots, s'' \quad ; \quad s'' \leq s' ,$$

on montre que l'équation adjointe (2.26) s'écrit :

$$\frac{d\tilde{\lambda}}{d\tau} = -\tilde{\lambda} \frac{\partial f}{\partial x} - \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \nu \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.87)$$

pour $X = x(\tau) \in \pi_{pe}$.

2.17 LEMME 2.7. BARRIERES.

Hypothèse 2.6.

1. Supposons qu'il existe une fonction $\tilde{g}: X \longrightarrow \tilde{g}(x)$, $x \in G$, de classe C^1 sur G , telle que $\tilde{n}(x) = \text{grad } \tilde{g}(x)$ soit défini et différent de zéro pour tout $x \in G$.

2. Supposons qu'il existe $\tilde{f}$ et $\tilde{e}$ telles que :

$$\begin{aligned} \max_{u \in K^P} \tilde{n}(x) \cdot f(x, u, \tilde{e}(x)) &= \min_{v \in K^E} \tilde{n}(x) \cdot f(x, \tilde{f}(x), v) \\ &= \tilde{n}(x) \cdot f(x, \tilde{f}(x), \tilde{e}(x)) = 0 \end{aligned} \quad (2.88)$$

3. Supposons également qu'il existe une constante C telle que :

$$S(C) \triangleq \{ x ; \tilde{g}(x) = C \} \neq \emptyset \quad (2.89)$$

et telle que l'on ait l'une des deux inégalités suivantes :

$$\tilde{g}(x) > C \quad \forall x \in \theta^P \quad (2.90)$$

$$\tilde{g}(x) < C \quad \forall x \in \theta^E \quad (2.91)$$

Nous allons montrer le lemme suivant :

Lemme 2.7. Si l'hypothèse 2.6 est vérifiée avec l'inégalité (2.90), alors :

$$S(C) \subset \text{comp } \tilde{Q}^P \quad (2.92)$$

Si l'hypothèse 2.6 est vérifiée avec l'inégalité (2.91), alors :

$$S(C) \subset \text{comp } \tilde{Q}^E \quad (2.93)$$

Démonstration. Nous démontrerons (2.92). Soit $x^i \in S(c)$.
D'après (2.89) on a :

$$\tilde{g}(x^i) = C \quad (2.94)$$

Soit $\tilde{x} \in \gamma(x^i, \mu, \tilde{e})$ où $\tilde{e}$ est définie par (2.88)
et où μ est une stratégie quelconque ; $\Gamma_{\tilde{x}}(x^i, \mu, \tilde{e})$
est la courbe descriptive correspondante.

Si $\tilde{x} = x^i$, d'après (2.90) et (2.94) il est
clair que :

$$\Gamma_{\tilde{x}}(x^i, \mu, \tilde{e}) \cap \theta^p = \phi \quad (2.95)$$

Si $\tilde{x}: \tau \longrightarrow \tilde{x}(\tau)$, $\tau \in [0, \tau^s)$ est telle
que $\tau^s \neq 0$, on a d'après (2.88) :

$$\text{grad } \tilde{g}(x) \cdot f(x, \mu(x), \tilde{e}(x)) \leq 0 \quad \text{pour tout } x = \tilde{x}(\tau) \\ \tau \in [0, \tau^s)$$

c'est-à-dire :

$$\frac{d}{d\tau} [\tilde{g}(\tilde{x}(\tau))] \leq 0 \quad \tau \in [0, \tau^s) \quad (2.96)$$

Comme $\tilde{x}(0) = x^i$, on déduit de (2.94) et (2.96) :

$$\tilde{g}(\tilde{x}(\tau)) \leq C \quad \forall \tau \in [0, \tau^s)$$

et d'après (2.90) :

$$\Gamma_{\tilde{x}}(x^i, \mu, \tilde{z}) \cap \theta^p = \emptyset \quad \forall \mu \in S^p \quad (2.97)$$

x^i est un point quelconque de $S(C)$. Ainsi, d'après (2.95) et (2.97) :

$$(\mu, \tilde{z}) \notin \mathcal{C}^p(x^i) \quad \forall x^i \in S(C), \quad \forall \mu \in S^p \quad (2.98)$$

Comme $\mathcal{C}^{*p}(x^i) \subseteq \mathcal{C}^p(x^i)$, on a a fortiori :

$$(\mu, \tilde{z}) \notin \mathcal{C}^{*p}(x^i) \quad \forall x^i \in S(C), \quad \forall \mu \in S^p \quad (2.99)$$

De sorte que :

$$x^i \in S(C) \implies x^i \in \text{comp } \mathcal{Q}^{*p}$$

c'est-à-dire :

$$S(C) \subseteq \text{comp } \mathcal{Q}^{*p} \quad (2.92)$$

On démontrerait de même la relation (2.93).

Remarque 1. La relation (2.92) est tirée de (2.99). A partir de (2.98), en se reportant au Chapitre I § 1.9 et à la relation (1.35) qui définit $\text{comp } A$, on obtient :

$$S(C) \subseteq \text{comp } A \quad (2.100)$$

on obtiendrait de même la relation :

$$S(C) \subseteq \text{comp } B \quad (2.101)$$

dans le cas où l'hypothèse 2.6 est vérifiée avec (2.91).

Remarque 2. Comme $\theta^P \cap \theta^E = \emptyset$, l'hypothèse 2.6 peut être vérifiée avec (2.90) et (2.91).

Nous appellerons $S(C)$ une barrière.

Nous allons utiliser ces résultats pour traiter quelques exemples.

2.18 EXEMPLES.

Exemple 2.1.

Un jeu à une cible θ^P est régi par les équations :

$$\dot{x}_1 = u + v$$

$$\dot{x}_2 = -2$$

(2.102)

$$\dot{x}_3 = 1$$

où $K^P = \{ u ; |u| \leq 1 \}$

et $K^E = \{ v ; |v| \leq 1 \}$

Soit $\theta^P = \{ X ; X = (x_1, x_2, x_3), h(X) = R^2 - (x_1^2 + x_2^2) \geq 0 \}$ (2.103)

Supposons que $\Xi \neq \emptyset$. Soit $X^0 \in \Xi$.
 Supposons qu'il existe un trajet non nul π_{te} , de point initial X^0 , engendré par $(\tilde{p}_{X^0}^*, \tilde{e}_{X^0}^*)$, représenté par (2.34). Nous supposons les hypothèses 2.2 - 2.4 vérifiées. D'après (2.103), il est clair que l'hypothèse 2.5 est satisfaite.

La fonction $\mathcal{H}$ est :

$$\mathcal{H}(\lambda, X, u, v) = \lambda_1(u+v) - 2\lambda_2 + \lambda_3 \quad (2.104)$$

et d'après (2.86) les équations adjointes sont

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= 0 \\ \dot{\lambda}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.105)$$

$$\dot{\lambda}_3 = 0$$

$$\text{soit } \hat{\lambda}_j(\tau) = \lambda_j = c^k \quad \tau \in [0, \tau^t] \quad (2.106)$$

$j = 1, 2, 3.$

De (2.74) du théorème 2.1 et des conditions imposées à u et v , on tire :

$$u = \operatorname{sgn} \lambda_1 \quad (2.107)$$

$$v = -\operatorname{sgn} \lambda_1$$

Soit $X^t = x(\tau^t)$ le point final de π_{te} .
 Supposons que $X^t \in \theta^r$. D'après les conditions de transversalité (partie 2 du théorème 2.1), on a :

$$\lambda^t = \hat{\lambda}(\tau^t) = k \operatorname{grad} h(x) \Big|_{x^t} \quad \text{avec } k > 0$$

On tire de (2.103) :

$$\begin{aligned} \lambda_1^t &= -2kX_1^t \\ \lambda_2^t &= -2kX_2^t \\ \lambda_3^t &= 0 \end{aligned} \quad (2.108)$$

D'après (2.75) du théorème 2.1, et d'après (2.106) - (2.108), on a :

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_3(\tau) &= 0 & \tau \in [0, \tau^t] \\ \hat{\lambda}_2(\tau) &= 0 & \tau \in [0, \tau^t] \\ X_2^t &= 0 \end{aligned}$$

Et d'après (2.103)

$$X_1^t = \pm \mathcal{R}$$

Le long de π_{pe} , les équations (2.102) s'écrivent :

$$\dot{X}_1 = 0$$

$$\dot{X}_2 = -2$$

$$\dot{X}_3 = 1$$

En projection sur le plan (x_1, x_2) , les trajets π_{pe} sont représentés par :

$$x_1(\tau) \equiv x_1(\tau^f) = x_1^f = \pm R$$

$$x_2(\tau) = -2(\tau - \tau^f) \geq 0$$

On vérifie facilement que les plans $x_1 = C$, avec $|C| > R$ sont des barrières. On a :

$$\{x; x_1 = C, |C| > R\} \subset \text{comp } \mathbb{Q}^p$$

Exemple 2.2.

Un jeu à une cible θ^p est régi par les équations :

$$\dot{x}_1 = u_1 + v$$

$$\dot{x}_2 = u_2 \quad (2.109)$$

$$\dot{x}_3 = 1$$

$$\text{où } K^p = \{(u_1, u_2); u_1^2 + u_2^2 \leq w^2\} \quad w = \text{cte}, \quad 0 < w < 1.$$

$$\text{et } K^e = \{v; |v| \leq 1\}$$

$$\text{Soit } \theta^p = \{x; x = (x_1, x_2, x_3), h(x) = R^2 - (x_1^2 + x_2^2) \geq 0\} \quad (2.110)$$

Nous faisons les mêmes hypothèses que dans l'exemple précédent. La fonction $\mathcal{H}$ est :

$$\mathcal{H}(\lambda, x, u, v) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_1 v + \lambda_3 \quad (2.111)$$

et les équations adjointes sont :

$$\dot{\lambda}_1 = 0$$

$$\dot{\lambda}_2 = 0$$

$$\dot{\lambda}_3 = 0$$

(2.112)

$$\text{Soit } \hat{\lambda}_j(\tau) = \lambda_j = c^k \quad \tau \in [0, \tau^f] \quad (2.113)$$

$$j = 1, 2, 3.$$

$$\text{Posons } \hat{u}_j(\tau) = \left(p_{x^0}^*(x(\tau)) \right)_j \quad j = 1, 2.$$

$$\text{et } \hat{v}(\tau) = \check{c}_{x^0}(x(\tau))$$

D'après les conditions imposées à u_1 , u_2 , v , d'après la condition de Minimax (2.74) du théorème 2.1, on déduit de (2.111) et (2.113) :

$$\hat{u}_1(\tau) = w \frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} = c^k \quad \tau \in [0, \tau^f] \quad (2.114)$$

$$\hat{u}_2(\tau) = w \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} = c^k \quad \tau \in [0, \tau^f] \quad (2.115)$$

$$\hat{v}(\tau) = -\operatorname{sgn} \lambda_1 \quad \tau \in [0, \tau^f] \quad (2.116)$$

Soit $x^f = x(\tau^f)$ le point final de π_{pe} . Supposons que $x^f \in \theta^p$. D'après les conditions de transversalité

du théorème 2.1 (partie 2), on a :

$$\lambda^f = \hat{\lambda}(\tau^f) = k \operatorname{grad} h(x) \Big|_{x^f} \quad \text{avec } k > 0$$

Soit d'après (2.110) :

$$\begin{aligned} \lambda_1^f &= -2k x_1^f \\ \lambda_2^f &= -2k x_2^f \\ \lambda_3^f &= 0 \end{aligned} \quad (2.117)$$

D'après l'équation (2.75) du théorème 2.1 et d'après (2.113) - (2.117) on a :

$$\hat{\lambda}_3(\tau) = 0 \quad \tau \in [0, \tau^f]$$

$$\hat{\lambda}_1(\tau) = c^k = \lambda_1 = \lambda_1^f \quad \tau \in [0, \tau^f]$$

$$\hat{\lambda}_2(\tau) = c^k = \lambda_2 = \lambda_2^f \quad \tau \in [0, \tau^f]$$

$$w \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} - |\lambda_1| = 0 \quad (2.118)$$

D'après (2.110) et (2.117) :

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 4k^2 R^2$$

Soit finalement :

$$x_1^{\frac{1}{2}} = \pm w R \quad (2.119)$$

Le long de π_{pe} , les équations (2.109) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -w \frac{x_1^{\frac{1}{2}}}{R} - \operatorname{sgn} \lambda_1 \\ \dot{x}_2 &= -w \frac{x_2^{\frac{1}{2}}}{R} \\ \dot{x}_3 &= 1 \end{aligned} \quad (2.120)$$

et les trajets π_{pe} ont pour support des droites, dont les projections sur le plan (x_1, x_2) sont les tangentes au cercle : $x_1^2 + x_2^2 = R^2$, aux points :

$$P = (Rw, R\sqrt{1-w^2})$$

$$Q = (Rw, -R\sqrt{1-w^2})$$

$$S = (-Rw, R\sqrt{1-w^2})$$

$$T = (-Rw, -R\sqrt{1-w^2})$$

Nous désignerons ces tangentes par $P'P P''$, $Q'Q Q''$, $S'S S''$, et $T'T T''$.

Soit π_{pe} un trajet dont le point final $X^f \in \theta^p$, et tel que $(X_1^f, X_2^f) = P$. Le coefficient k étant positif, on a $\lambda_1^f < 0$ et les deux premières équations (2.120) s'écrivent :

$$\dot{X}_1 = 1 - w^2 > 0$$

$$\dot{X}_2 = -w \sqrt{1 - w^2} < 0$$

Par suite, si l'on désigne par π'_{pe} la projection sur (X_1, X_2) d'un trajet π_{pe} , on doit avoir :

$$\pi'_{pe} \subset P'P$$

On trouve de même que les π'_{pe} doivent appartenir aux demi-droites $Q'Q$, $S'S$ et $T'T$.

Posons :

$$\tilde{g}_1(x_1, x_2) = -wR x_1 - R\sqrt{1-w^2} x_2$$

$$\tilde{g}_2(x_1, x_2) = wR x_1 - R\sqrt{1-w^2} x_2$$

$$\tilde{g}_3(x_1, x_2) = -wR x_1 + R\sqrt{1-w^2} x_2$$

$$\tilde{g}_4(x_1, x_2) = wR x_1 + R\sqrt{1-w^2} x_2$$

On voit facilement que toute constante $C > -R^2$ est telle que :

$$\tilde{g}_i(x_1, x_2) > C \quad \forall x \in \theta^P \quad i=1,2,3,4. \quad (2.121)$$

L'hypothèse 2.6 est vérifiée par les fonctions $\tilde{g}_i$, $i = 1,2,3,4$. L'inégalité (2.90) prend la forme (2.121). Alors d'après le lemme 2.7, on peut affirmer que les plans

$$S_i(C) = \left\{ x; x=(x_1, x_2, x_3), \tilde{g}_i(x_1, x_2) = C, C > -R^2 \right\} \quad (2.122)$$

$i = 1, 2, 3, 4.$

sont des barrières. On a :

$$S_i(C) \subset \text{comp } \mathbb{Q}^P \quad i = 1,2,3,4$$

de sorte que les projections π'_{pe} des $\square$ -trajets π_{pe} sur (x_1, x_2) doivent appartenir aux segments de droites MP, MS, NQ, NT.

CHAPITRE III

LIENS ENTRE LES JEUX QUALITATIFS ET LES JEUX QUANTITATIFS

3.1 DIFFERENTES SORTES DE JEUX.

Soit $G \subseteq E^k$, et soient S^P et S^E des ensembles de stratégies et l'équation différentielle vectorielle :

$$\frac{dx}{d\tau} = f(x, u, v) \quad (3.1)$$

Soit $\theta^P \subseteq G$, $\theta^P \neq \emptyset$, $\theta^E = \emptyset$.

Définition 3.1. On appellera jeu 1, le jeu à une cible θ^P de règles G , S^P , S^E et γ_1 , où $\gamma_1: G \times S^P \times S^E \longrightarrow G$ est l'application définie dans le chapitre I, correspondant à l'équation 3.1.

On posera $\theta^P = \theta_1^P$.

Considérons une variable supplémentaire x_0 et l'équation

$$\frac{dx_0}{d\tau} = f_0(x, u, v) \quad (3.2)$$

où f_0 est de classe C^1 sur $G \times U \times V$.

Posons :

$$Y = (x_0, x) \quad Y = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in E^{n+1}$$

$$\tilde{f} = (f_0, f) \quad \tilde{f} = (f_0, f_1, \dots, f_n)$$

$$I^i = \{ Y ; Y = (x_0, x^i) , x^i \in G \}$$

$$G = \{ x_0 \} \times G$$

$$\theta_2^p = \{ x_0 \} \times \theta_1^p$$

Avec ces notations, les équations (3.1) et (3.2) conduisent à l'équation différentielle vectorielle :

$$\frac{dy}{dt} = \tilde{f}(x, u, v) \quad (3.3)$$

Nous ferons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3.1. Si $x : \tau \longrightarrow X = x(\tau)$, $\tau \in [0, \tau^s)$,
est solution de l'équation :

$$\frac{dx}{d\tau} = f(x, \mu(x), e(x)) \quad (3.4)$$

pour un point initial x^i donné,
alors il existe une solution $y : \tau \longrightarrow Y = y(\tau)$, $\tau \in [0, \tau^s)$,
de l'équation :

$$\frac{dy}{d\tau} = F(x, \mu(x), e(x)) \quad (3.5)$$

pour un point initial y^i donné, $y^i \in Y$.
telle que : $y(\tau) = (x_0(\tau), x(\tau))$

avec :

$$x_0(\tau) = x_0^i + \int_0^\tau f_0(x(\xi), \mu(x(\xi)), e(x(\xi))) d\xi \quad (3.6)$$

Posons :

$$\mu(y) = \mu(x) \quad \mu \in \mathcal{P}^P, \quad y \in Y, \quad x \in G$$

$$e(y) = e(x) \quad e \in \mathcal{P}^E, \quad y \in Y, \quad x \in G$$

les stratégies μ et e sont définies ainsi sur G et sont indépendantes de x_0 .

Définition 3.2. On appellera jeu 2, le jeu à une cible θ_2^p , de règles G , $\mathcal{F}^p$, $\mathcal{F}^E$ et γ_2 , où $\gamma_2 : G \times \mathcal{F}^p \times \mathcal{F}^E \longrightarrow G$ est l'application définie dans le Chapitre I (pour E^{n+1} au lieu de E^n), correspondant à l'équation différentielle (3.5).

Notons que dans (3.5), $\tilde{f}$ ne dépend pas de x_0 .

Soit maintenant :

$$\theta_3^p(c) \triangleq \left\{ \gamma ; \gamma = (x_0, x) , x \in \theta_1^p , x_0 \leq c \right\} \quad (3.7)$$

où C est une constante donnée.

On a :

$$\theta_3^p(c) \subset \theta_2^p \quad (3.8)$$

Définition 3.3. On appellera jeu 3, le jeu à une cible $\theta_3^p(c)$, de règles G , $\mathcal{F}^p$, $\mathcal{F}^E$ et γ_3 , où $\gamma_3 = \gamma_2$ (cf. définition 3.2).

Il est clair qu'on peut définir une famille de cibles $\theta_3^P(C)$, en faisant varier la constante C , on peut par suite définir une famille de jeux 3.

Soit Π^i un trajet dans G , de point initial $Y^i = (X_0^i, X^i)$, de point final $Y^f = (X_0^f, X^f)$, engendré par (r, e) , représenté par :

$$\begin{aligned} \Pi^i &= \left\{ Y ; Y = y(\tau), \tau \in [0, \tau^f], y \in \gamma_2(Y^i, r, e) \right. & (3.9) \\ & y(\tau) = (x_0(\tau), x(\tau)) \text{ où } x \in \gamma_1(X^i, r, e) \\ & \left. \text{et } x_0(\tau) = X_0^i + \int_0^\tau f_0(x(\xi), r(x(\xi)), e(x(\xi))) d\xi \right\} \end{aligned}$$

La projection de Π^i sur E^n est π^i , trajet de point initial X^i , de point final X^f , engendré par (r, e) , représenté par :

$$\pi^i = \left\{ x ; x = x(\tau), \tau \in [0, \tau^f], x \in \gamma_1(X^i, r, e) \right\} \quad (3.10)$$

Nous désignerons par Π^f un trajet dans G dont le point final $Y^f = (X_0^f, X^f) \in \theta_2^P$, et par $\Pi^f(C)$, un trajet dans G dont le point final $Y^f \in \theta_3^P(C)$. D'après les définitions de θ_2^P et $\theta_3^P(C)$, et d'après (3.8), il est clair qu'on a alors :

$$X^f = x(\tau^f) = \text{Proj}_{E^n} Y^f \in E_1^P$$

Inversement, d'après l'hypothèse 3.1, si π^i est un trajet dans G , dont le point final $x^i \in \theta_1^P$, alors il existe un trajet π^i dans G dont le point final $y^i = (x_0^i, x^i) \in \theta_2^P$. Le trajet π^i est représenté par (3.10) et on a :

$$x_0^i = x_0^i + \int_0^{\tau^i} f_0(x(\xi), h(x(\xi)), e(x(\xi))) d\xi \quad (3.11)$$

Si x_0^i donné par (3.11) est tel que $x_0^i \leq C$, alors $y^i \in \theta_3^P(C)$.

Définitions 3.4. Nous désignerons par $\mathcal{C}_1^P(x^i)$, $\mathcal{C}_2^P(y^i)$, $\mathcal{C}_3^P(y^i, c)$ et $\mathcal{C}_1^E(x^i)$, $\mathcal{C}_2^E(y^i)$, $\mathcal{C}_3^E(y^i, c)$, les ensembles de couples stratégiques jouables pour J^P et J^E respectivement, pour les points initiaux $x^i \in G$, $y^i \in G$, et pour les jeux 1,2,3.

Nous désignerons par $\mathcal{C}_1^{*P}(x^i)$, $\mathcal{C}_2^{*P}(y^i)$, $\mathcal{C}_3^{*P}(y^i, c)$ et $\mathcal{C}_1^{*E}(x^i)$, $\mathcal{C}_2^{*E}(y^i)$, $\mathcal{C}_3^{*E}(y^i, c)$, les ensembles de couples stratégiques fortement jouables pour J^P et J^E respectivement, pour les points initiaux $x^i \in G$, $y^i \in G$, et pour les jeux 1,2,3.

Il résulte de ce qui précède que :

$$(h, e) \in \mathcal{C}_1^P(x^i) \iff (h, e) \in \mathcal{C}_2^P(y^i), y^i \in \Sigma^i \quad (3.12)$$

$$(h, e) \in \mathcal{C}_1^{*P}(x^i) \iff (h, e) \in \mathcal{C}_2^{*P}(y^i), y^i \in \Sigma^i \quad (3.13)$$

$$(p, e) \in \mathcal{C}_1^E(x^i) \iff (p, e) \in \mathcal{C}_2^E(y^i), y^i \in X^i \quad (3.14)$$

$$(p, e) \in \mathcal{C}_1^{*E}(x^i) \iff (p, e) \in \mathcal{C}_2^{*E}(y^i), y^i \in X^i \quad (3.15)$$

D'autre part :

$$\mathcal{C}_1^{*E}(x^i) = \mathcal{C}_1^E(x^i) \quad (3.16)$$

donc :

$$\mathcal{C}_2^{*E}(y^i) = \mathcal{C}_2^E(y^i) \quad (3.17)$$

Toujours d'après ce qui précède, il est clair que :

$$\mathcal{C}_3^P(y^i, c) \subset \mathcal{C}_2^P(y^i) \quad (3.18)$$

$$\mathcal{C}_3^{*P}(y^i, c) \subset \mathcal{C}_2^{*P}(y^i) \quad (3.19)$$

$$\mathcal{C}_2^E(y^i) \subset \mathcal{C}_3^E(y^i, c) \quad (3.20)$$

$$\mathcal{C}_3^E(y^i, c) = \mathcal{C}_3^{*E}(y^i, c) \quad (3.21)$$

Définitions 3.5. Revenant à la définition 2.2 et en l'appliquant aux jeux 1,2,3, on a :

$$Q_1^P \triangleq \left\{ x^i ; \exists p_{x^i}^* \quad \forall e, (p_{x^i}^*, e) \in \mathcal{C}_1^{*P}(x^i) \right\} \quad (3.22)$$

$$\tilde{Q}_1^* \triangleq \left\{ x^i; \exists \tilde{e}_{x^i} \quad \forall \mu, (\mu, \tilde{e}_{x^i}) \in \tilde{C}_1^*(x^i) \right\} \quad (3.23)$$

$\tilde{Q}_1^*$ et $\tilde{Q}_1^E$ sont les ensembles du jeu 1.

$$\tilde{Q}_2^* \triangleq \left\{ \gamma^i; \gamma^i = (x_0^i, x^i), \exists \tilde{\mu}_{x^i} \quad \forall e, (\tilde{\mu}_{x^i}, e) \in \tilde{C}_2^*(\gamma^i) \right\} \quad (3.24)$$

$$\tilde{Q}_2^E \triangleq \left\{ \gamma^i; \gamma^i = (x_0^i, x^i), \exists \tilde{e}_{x^i} \quad \forall \mu, (\mu, \tilde{e}_{x^i}) \in \tilde{C}_2^E(\gamma^i) \right\} \quad (3.25)$$

$\tilde{Q}_2^*$ et $\tilde{Q}_2^E$ sont les ensembles du jeu 2.

$$\tilde{Q}_3^*(c) \triangleq \left\{ \gamma^i; \gamma^i = (x_0^i, x^i), \exists \tilde{\mu}_{x^i} \quad \forall e, (\tilde{\mu}_{x^i}, e) \in \tilde{C}_3^*(\gamma^i, c) \right\} \quad (3.26)$$

$$\tilde{Q}_3^E(c) \triangleq \left\{ \gamma^i; \gamma^i = (x_0^i, x^i), \exists \tilde{e}_{x^i} \quad \forall \mu, (\mu, \tilde{e}_{x^i}) \in \tilde{C}_3^E(\gamma^i, c) \right\} \quad (3.27)$$

$\tilde{Q}_3^*(c)$ et $\tilde{Q}_3^E(c)$ sont les ensembles du jeu 3.

D'après (3.12) - (3.21), on a :

$$\tilde{Q}_1^* = \text{Proj}_{E^n} \tilde{Q}_2^* \quad \tilde{Q}_2^* = \{x_0\} \times \tilde{Q}_1^* \quad (3.28)$$

$$\tilde{Q}_1^E = \text{Proj}_{E^n} \tilde{Q}_2^E \quad \tilde{Q}_2^E = \{x_0\} \times \tilde{Q}_1^E \quad (3.29)$$

$$\tilde{Q}_3^*(c) \subset \tilde{Q}_2^* \quad (3.30)$$

$$\tilde{Q}_3^E(c) \subset \tilde{Q}_2^E(c) \quad (3.31)$$

3.2 MINIMAX LOCAL.

Supposons l'hypothèse 3.1 vérifiée, et soit π^i un trajet dans G de point initial X^i , engendré par (μ, e) , de support $\Gamma_x(X^i, \mu, e)$, représenté par :

$$\pi^i = \{x; x = x(\tau), \tau \in [0, \tau^i], x \in \gamma_i(X^i, \mu, e)\} \quad (3.32)$$

on a : $X^i = x(\tau^i)$.

Définition 3.6. Nous poserons par définition :

$$\begin{aligned} V(X^i, X^i; \mu, e, \pi^i) &\triangleq \int_0^{\tau^i} f_0(x(\xi), \mu(x(\xi)), e(x(\xi))) d\xi \\ &\triangleq V_x(X^i, X^i; \mu, e) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Définition 3.7. Soit $(\mu, e) \in \mathcal{C}_1^p(X^i)$ et π^i un trajet de point initial X^i , engendré par (μ, e) , de support $\Gamma_x(X^i, \mu, e)$, de point final $X^i \in \theta_1^p$. Nous poserons :

$$V(X^i, X^i; \mu, e, \pi^i) \triangleq V_x(X^i, \theta_1^p; \mu, e) \quad (3.34)$$

Soit $X^i \in \bar{Q}_1^p$; il existe $\mu_{X^i}^*$ optimale pour J^p en X^i pour le jeu 1, c'est-à-dire :

$$\exists \mu_{X^i}^* \text{ telle que } (\mu_{X^i}^*, e) \in \mathcal{C}_1^p(X^i) \quad \forall e \in \mathcal{P}^e.$$

donc :

$$\Gamma_x(x^i, \tilde{r}_{x^i}^*, e) \cap \theta_1^P \neq \emptyset \quad \forall x \in \gamma_1(x^i, \tilde{r}_{x^i}^*, e), \forall e \in \mathcal{E} \quad (3.35)$$

A toute courbe descriptive $\Gamma_x(x^i, \tilde{r}_{x^i}^*, e)$ qui vérifie (3.35), on peut associer un trajet π_P^{if} qui est un P-trajet optimal pour le jeu 1 (cf. définition 2.5), de support $\Gamma_x(x^i, \tilde{r}_{x^i}^*, e)$, représenté par :

$$\pi_P^{if} = \left\{ x ; x = x(\tau), \tau \in [0, \tau^f], x \in \gamma_1(x^i, \tilde{r}_{x^i}^*, e) \right\} \quad (3.36)$$

et dont le point final $x^f = x(\tau^f) \in \theta_1^P$.

D'après le lemme 2.2, on a :

$$\pi_P^{if} \subset \tilde{Q}_1^P \quad (3.37)$$

Si l'on considère le jeu 2, on a :

$$x_0(\tau) = x_0^i + \int_0^\tau f_0(x(\xi), \tilde{r}_{x^i}^*(x(\xi)), e(x(\xi))) d\xi \quad (3.38)$$

$$x_0^f = x_0(\tau^f) \quad (3.39)$$

$$y^f = (x_0^f, x^f) \in \theta_2^P \quad (3.40)$$

Et d'après (3.28), le trajet π_P^{if} représenté par $y(\tau) = (x_0(\tau), x(\tau))$, $\tau \in [0, \tau^f]$, $x \in \gamma_1(x^i, \tilde{r}_{x^i}^*, e)$ est un P-trajet optimal pour le jeu 2 et on a :

$$\Pi_P^{i\dagger} \subset \check{Q}_2^P \quad (3.41)$$

Si $X_0^{\dagger}$ défini par (3.38) et (3.39) est tel que $X_0^{\dagger} \leq C$,
alors $\gamma^{\dagger} \in \theta_3^P(C)$ où $\gamma^{\dagger}$ est donné par (3.40).

Posons, en utilisant (3.34) :

$$\Omega(C) \triangleq \left\{ \gamma^i; \gamma^i = (X_0^i, x^i), x^i \in \check{Q}_1^P, X_0^i + V_x(x^i, \theta_1^P; \check{F}_{x^i}^*, e) \leq C \right. \\ \left. \forall x \in \gamma_1(x^i, \check{F}_{x^i}^*, e), \forall e \in S^E \right\} \quad (3.42)$$

on a :

$$\Omega(C) \subset \check{Q}_3^P(C) \quad (3.43)$$

Soit $x^i \in \check{Q}_1^P$. Supposons que :

Hypothèse 3.2. Il existe M tel que :

$$V_x(x^i, \theta_1^P; \check{F}_{x^i}^*, e) \leq M \quad \forall x \in \gamma_1(x^i, \check{F}_{x^i}^*, e), \forall e \in S^E$$

et il existe $\hat{e} \in S^E$ telle que :

$$V_{\hat{x}}(x^i, \theta_1^P; \check{F}_{x^i}^*, \hat{e}) = M \quad \text{où} \quad \hat{x} \in \gamma_1(x^i, \check{F}_{x^i}^*, \hat{e})$$

Nous dirons que $\text{Max}_{e,x} V_x(x^i, \theta_i^p; \bar{r}_{x^i}^*, e)$ existe et est égal à M .

Moyennant l'Hypothèse 3.2 on peut écrire (3.42) sous la forme :

$$\Omega(c) = \left\{ y^i; y^i = (x_0^i, x^i), x^i \in \bar{Q}_i^p, x_0^i + M \leq c \right\} \quad (3.44)$$

Supposons maintenant que, moyennant l'hypothèse 3.2.

Hypothèse 3.3. $\forall x^i \in \bar{Q}_i^p, \exists \bar{e}_{x^i}$ telle que :

$$V_{\bar{x}}(x^i, \theta_i^p; \bar{r}, \bar{e}_{x^i}) \geq \text{Max}_{e,x} V_x(x^i, \theta_i^p; \bar{r}_{x^i}^*, e) \quad (3.45)$$

$$\forall \bar{x} \in \gamma_i(x^i, \bar{r}, \bar{e}_{x^i}) \text{ telles que } (\bar{r}, \bar{e}_{x^i}) \in \bar{C}_i^p(x^i)$$

Posons :

$$\gamma_i(\bar{e}_{x^i}) \triangleq \left\{ \bar{r}; \bar{r} \in S^p, (\bar{r}, \bar{e}_{x^i}) \in \bar{C}_i^p(x^i) \right\}$$

Comme $x^i \in \bar{Q}_i^p, \exists \bar{r}_{x^i}^*$ telle que $(\bar{r}_{x^i}^*, e) \in \bar{C}_i^p(x^i), \forall e$
et en particulier $(\bar{r}_{x^i}^*, \bar{e}_{x^i}) \in \bar{C}_i^p(x^i) \in \bar{C}_i^p(x^i)$, donc $\gamma_i(\bar{e}_{x^i}) \neq \emptyset$.

Définition 3.8. Si il existe m tel que :

$$\begin{aligned} V_{\bar{x}}(x^i, \theta_i^p; \bar{r}, \bar{e}_{x^i}) &\geq m & \forall \bar{x} \in \gamma_i(x^i, \bar{r}, \bar{e}_{x^i}) \\ & & \forall \bar{r} \in \gamma_i(\bar{e}_{x^i}) \end{aligned} \quad (3.46)$$

et si il existe $\bar{r} \in \mathcal{Y}(\bar{e}_{x_i})$ et un $\bar{x} \in \gamma_i(x^i, \bar{r}, \bar{e}_{x_i})$
tel que :

$$V_{\bar{x}}(x^i, \theta_i^p; \bar{r}, \bar{e}_{x_i}) = m$$

on dit que $\min_{\substack{\bar{x} \in \gamma_i(x^i, \bar{r}, \bar{e}_{x_i}) \\ \bar{r} \in \mathcal{Y}(\bar{e}_{x_i})}} V_{\bar{x}}(x^i, \theta_i^p; \bar{r}, \bar{e}_{x_i})$ existe et est égal à m .

Lemme 3.1. Soit $x^i \in Q_i^*$. Supposons l'hypothèse 3.2
vérifiée,

soit :

$$\max_{\substack{x \in \gamma_i(x^i, \bar{r}_{x^i}, e) \\ e \in \mathcal{E}}} V_x(x^i, \theta_i^p; \bar{r}_{x^i}, e) = V_{\hat{x}}(x^i, \theta_i^p; \bar{r}_{x^i}, \hat{e}) = M \quad (3.47)$$

Supposons de plus l'hypothèse 3.3 vérifiée, soit : $\exists \bar{e}_{x^i}$
telle que :

$$V_{\bar{x}}(x^i, \theta_i^p; \bar{r}, \bar{e}_{x^i}) \geq M \quad \forall \bar{x} \in \gamma_i(x^i, \bar{r}, \bar{e}_{x^i}) \quad (3.48) \\ \forall \bar{r} \in \mathcal{Y}(\bar{e}_{x^i})$$

Alors, $\min_{\substack{\bar{x} \in \gamma_i(x^i, \bar{r}, \bar{e}_{x^i}) \\ \bar{r} \in \mathcal{Y}(\bar{e}_{x^i})}} V_{\bar{x}}(x^i, \theta_i^p; \bar{r}, \bar{e}_{x^i})$ existe et est égal à M, et :

$$\begin{aligned} \max_{\substack{x \in \gamma_1(x^i, \bar{p}_{x^i}, e) \\ e \in \mathcal{E}}} V_x(x^i, \theta_1^p; \bar{p}_{x^i}^*, e) &= \min_{\substack{\bar{x} \in \gamma_1(x^i, \bar{p}, \bar{e}_{x^i}) \\ \bar{p} \in \mathcal{Y}(\bar{e}_{x^i})}} V_{\bar{x}}(x^i, \theta_1^p; \bar{p}, \bar{e}_{x^i}) \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$= V_x(x^i, \theta_1^p; \bar{p}_{x^i}^*, \bar{e}_{x^i}) = M \quad \forall x \in \gamma_1(x^i, \bar{p}_{x^i}^*, \bar{e}_{x^i}) \quad (3.50)$$

Démonstration.

En effet, $\bar{e}_{x^i} \in \mathcal{E}$ et $\bar{p}_{x^i}^* \in \mathcal{Y}(\bar{e}_{x^i})$, donc d'après (3.47) et (3.48) on a :

$$\begin{aligned} V_{\bar{x}}(x^i, \theta_1^p; \bar{p}_{x^i}^*, \bar{e}_{x^i}) &\geq \max_{\substack{x \in \gamma_1(x^i, \bar{p}_{x^i}^*, e) \\ e \in \mathcal{E}}} V_x(x^i, \theta_1^p; \bar{p}_{x^i}^*, e) \geq V_x(x^i, \theta_1^p; \bar{p}_{x^i}^*, \bar{e}_{x^i}) \\ \forall \bar{x} \in \gamma_1(x^i, \bar{p}_{x^i}^*, \bar{e}_{x^i}) & \quad \forall x \in \gamma_1(x^i, \bar{p}_{x^i}^*, \bar{e}_{x^i}) \end{aligned}$$

et (3.50) est démontrée.

D'autre part, d'après (3.48), $\exists m = M$ tel que (3.46) soit vraie :

$$V_{\bar{x}}(x^i, \theta_1^p; \bar{p}, \bar{e}_{x^i}) \geq m \quad \forall \bar{x} \in \gamma_1(x^i, \bar{p}, \bar{e}_{x^i}), \quad \forall \bar{p} \in \mathcal{Y}(\bar{e}_{x^i})$$

et il existe $\bar{p} = \bar{p}_{x^i}^* \in \mathcal{Y}(\bar{e}_{x^i})$ tel que :

$$V_x(x^i, \theta_1^p; \bar{p}_{x^i}^*, \bar{e}_{x^i}) = m \quad \forall x \in \gamma_1(x^i, \bar{p}_{x^i}^*, \bar{e}_{x^i})$$

De sorte que $\min_{\bar{x}} V_x(x^i, \theta^p; \mu, \bar{e}_{x^i})$ existe et est égal à $m = M$
 $\bar{x} \in \gamma_1(x^i, \mu, \bar{e}_{x^i})$
 $\mu \in \mathcal{J}(\bar{e}_{x^i})$

et (3.49) est démontrée.

Soulignons que $V_x(x^i, \theta^p; \mu^*, \bar{e}_{x^i})$ a la même valeur M pour tous les $x \in \gamma_1(x^i, \mu^*, \bar{e}_{x^i})$. Nous noterons en général :

$$M \triangleq V(x^i, \theta^p; \mu^*, \bar{e}_{x^i}) \quad \text{pour } x^i \text{ donné} \quad (3.51)$$

$$M \triangleq \tilde{M}(x^i) \quad (3.51)'$$

Lemme 3.2. Soit $x^i \in \bar{Q}_1^p$. Si l'hypothèse 3.2 est vérifiée

avec μ_{x^i}' et M' et si l'hypothèse 3.3 est vérifiée

avec $\bar{e}_{x^i}'$ et M' ,

alors $M = M'$.

On a $\mu_{x^i}' \in \mathcal{J}(\bar{e}_{x^i}) \cap \mathcal{J}(\bar{e}_{x^i}')$ et $\mu_{x^i}^* \in \mathcal{J}(\bar{e}_{x^i}) \cap \mathcal{J}(\bar{e}_{x^i}')$

Si l'on écrit (3.49) et (3.50) pour μ_{x^i}' et $\bar{e}_{x^i}'$,
on a :

$$\begin{aligned} \max_{\substack{x \in \gamma_1(x^i, \mu_{x^i}', e) \\ e \in \mathcal{E}^e}} V_x(x^i, \theta^p; \mu_{x^i}', e) &= \min_{\substack{\bar{x} \in \gamma_1(x^i, \mu_{x^i}', \bar{e}_{x^i}') \\ \mu \in \mathcal{J}(\bar{e}_{x^i}')}} V_{\bar{x}}(x^i, \theta^p; \mu, \bar{e}_{x^i}') \end{aligned} \quad (3.49)'$$

$$= V(x^i, \theta^p; \mu_{x^i}', \bar{e}_{x^i}') = M' \quad (3.50)'$$

D'où l'on tire :

$$V_x(x^i, \theta_1^p; \tilde{f}_{x^i}^*, \bar{e}_{x^i}) \leq V(x^i, \theta_1^p; \tilde{f}_{x^i}^*, \bar{e}_{x^i}') \leq V_{\bar{x}}(x^i, \theta_1^p; \tilde{f}_{x^i}^*, \bar{e}_{x^i}') \quad (3.52)$$

$$x \in \gamma_1(x^i, \tilde{f}_{x^i}^*, \bar{e}_{x^i}) \qquad \bar{x} \in \gamma_1(x^i, \tilde{f}_{x^i}^*, \bar{e}_{x^i}')$$

On déduit de (3.49) et (3.50) :

$$V_x(x^i, \theta_1^p; \tilde{f}_{x^i}^*, \bar{e}_{x^i}') \leq V(x^i, \theta_1^p; \tilde{f}_{x^i}^*, \bar{e}_{x^i}) \leq V_{\bar{x}}(x^i, \theta_1^p; \tilde{f}_{x^i}^*, \bar{e}_{x^i}') \quad (3.53)$$

$$x \in \gamma_1(x^i, \tilde{f}_{x^i}^*, \bar{e}_{x^i}') \qquad \bar{x} \in \gamma_1(x^i, \tilde{f}_{x^i}^*, \bar{e}_{x^i})$$

Et finalement, d'après (3.52) et (3.53), on a :

$$V(x^i, \theta_1^p; \tilde{f}_{x^i}^*, \bar{e}_{x^i}) = M = V(x^i, \theta_1^p; \tilde{f}_{x^i}^*, \bar{e}_{x^i}') = M' \quad (3.54)$$

Les équations (3.49) et (3.50) sont appelées condition de Minimax pour le point initial $x^i \in \tilde{Q}_1^p$.

3.3 JEUX QUANTITATIFS. ^[4]

Définition 3.9. Nous désignerons par jeu 4, le jeu quantitatif à somme nulle, de règles G , $\mathcal{S}^p$, $\mathcal{S}^e$ et γ_1 (cf. définition du jeu 1) et de cible θ_1^p . Le critère de coût est la fonctionnelle V définie par (3.34) (cf. définition 3.7).

Pour $x^i \in G$ et pour l'ensemble des couples $(\tau, e) \in \mathcal{C}_1^p(x^i)$, le joueur J^P veut minimiser le coût $V_x(x^i, \theta_i^p; \tau, e)$, $x \in \gamma_i(x^i, \tau, e)$, tandis que J^E veut le maximiser.

Hypothèse 3.4. Supposons qu'il existe une stratégie $\tilde{\tau} \in \mathcal{S}^p$ qui soit optimale pour J^P sur $\tilde{Q}_1^p$, pour le jeu 1 (cf. définition 2.3).

Hypothèse 3.5. Supposons que $\max_{x, e} V_x(x^i, \theta_i^p; \tilde{\tau}, e)$ existe et soit égal à $M = \tilde{M}(x^i)$.

Hypothèse 3.6. Supposons qu'il existe une stratégie $\bar{e} \in \mathcal{S}^E$ telle que, $\forall x^i \in \tilde{Q}_1^p$

$$V_{\bar{x}}(x^i, \theta_i^p; \tau, \bar{e}) \geq \tilde{M}(x^i) \quad \forall \bar{x} \in \gamma_i(x^i, \tau, \bar{e}), \quad \forall \tau \in \mathcal{T}(\bar{e}) \quad (3.55)$$

Moyennant les hypothèses 3.4, 3.5, 3.6, on a, d'après le lemme 3.1

$$\begin{aligned} V_x(x^i, \theta_i^p; \tilde{\tau}, e) &\leq V(x^i, \theta_i^p; \tilde{\tau}, \bar{e}) \leq V_{\bar{x}}(x^i, \theta_i^p; \tau, \bar{e}) \\ \begin{matrix} x \in \gamma_i(x^i, \tilde{\tau}, e) \\ e \in \mathcal{S}^E \end{matrix} & \qquad \begin{matrix} \bar{x} \in \gamma_i(x^i, \tau, \bar{e}) \\ \tau \in \mathcal{T}(\bar{e}) \end{matrix} \end{aligned} \quad (3.56)$$

et

$$V(x^i, \theta_i^p; \tilde{\tau}, e) = \tilde{M}(x^i) \quad (3.57)$$

quel que soit le point $x^i \in \bar{Q}_1^*$

En nous référant à la théorie géométrique des jeux différentiels quantitatifs, $\bar{\mu}^*$ et $\bar{e}$ sont des stratégies optimales sur $\bar{Q}_1^*$, pour les joueurs J^P et J^E respectivement, et pour le jeu 4.

Définition 3.10. Supposons les hypothèses 3.2 et 3.3 vérifiées.

Nous appellerons surface restreinte du jeu, pour le jeu 4 et pour une constante C donnée :

$$\bar{\Sigma}^*(C) \triangleq \left\{ \gamma^i; \gamma^i = (x_0^i, x^i), x^i \in \bar{Q}_1^*, x_0^i = C - V(x^i, \theta_1^P; \bar{\mu}_{x^i}^*, \bar{e}_{x^i}) \right\} \quad (3.58)$$

Il est clair que $\bar{\Sigma}^*(C) \subset \bar{Q}_2^*$.

Si les hypothèses 3.2 et 3.3 sont remplacées par les hypothèses 3.4, 3.5, 3.6, la surface restreinte du jeu s'écrit :

$$\bar{\Sigma}^*(C) = \left\{ \gamma^i; \gamma^i = (x_0^i, x^i), x^i \in \bar{Q}_1^*, x_0^i = C - V(x^i, \theta_1^P; \bar{\mu}^*, \bar{e}) \right\} \quad (3.59)$$

La variable x_0^i qui apparaît dans (3.59) et (3.58) est appelée variable de coût et l'axe $\{x_0^i\}$ est appelé axe de coût.

En faisant varier la constante C , on obtient une famille $\{\bar{\Sigma}^*(C)\}$ de surfaces $\bar{\Sigma}^*(C)$ représentées soit par (3.58), soit par (3.59). D'après la définition de la surface restreinte

du jeu, on passe d'une surface de la famille à une autre par une translation parallèle à l'axe $\{x_0\}$.

Comme nous l'avons vu dans les démonstrations des lemmes 3.1 et 3.2, $V_x(x^i, \theta^p; \mu_{x^i}^*, \bar{e}_{x^i})$ a une valeur unique, $\forall x \in \gamma_i(x^i, \mu_{x^i}^*, \bar{e}_{x^i})$ et ceci quel que soit le couple $(\mu_{x^i}^*, \bar{e}_{x^i})$ défini par les hypothèses 3.2 et 3.3. Donc, dans la définition de $\sum^*(C)$, x_0^i est unique et par suite deux surfaces $\sum^*(C)$ correspondant à des constantes C différentes ont une intersection vide.

Posons, conformément aux notations de la théorie géométrique des jeux différentiels quantitatifs :

$$A / \sum^*(C) \triangleq \left\{ \gamma^i; \gamma^i = (x_0^i, x^i), x^i \in \bar{Q}_1^p, x_0^i > C - V(x^i, \theta^p; \mu_{x^i}^*, \bar{e}_{x^i}) \right\} \quad (3.60)$$

$$B / \sum^*(C) \triangleq \left\{ \gamma^i; \gamma^i = (x_0^i, x^i), x^i \in \bar{Q}_1^p, x_0^i < C - V(x^i, \theta^p; \mu_{x^i}^*, \bar{e}_{x^i}) \right\} \quad (3.61)$$

Il est clair que d'après (3.60) et (3.61), que les ensembles $A / \sum^*(C)$ et $B / \sum^*(C)$ sont contenus dans $\{x_0\} \times \bar{Q}_1^p = \bar{Q}_2^p$.

D'après le lemme 3.1 et d'après (3.60), si $\gamma^i \in A / \sum^*(C)$, alors il existe $\bar{e}_{x^i}$ telle que :

$$\begin{aligned} x_0^i + V_{\bar{x}}(x^i, \theta^p; \mu, \bar{e}_{x^i}) &> C & \forall \bar{x} \in \gamma_i(x^i, \mu, \bar{e}_{x^i}) \\ & & \forall \mu \in \mathcal{J}(\bar{e}_{x^i}) \end{aligned} \quad (3.62)$$

Si nous considérons maintenant le jeu 3 correspondant à la constante C qui entre dans la définition de $\sum^*(C)$, on tire de (3.62) :

$$(\mu, \bar{e}_{x_i}) \in \mathcal{C}_3^E(\gamma^i, C) \quad \forall \mu \in \mathcal{Y}(\bar{e}_{x_i})$$

D'autre part, si $\mu \notin \mathcal{Y}(\bar{e}_{x_i})$, alors $(\mu, \bar{e}_{x_i}) \in \mathcal{C}_1^E(x^i)$, donc a fortiori $(\mu, \bar{e}_{x_i}) \in \mathcal{C}_3^E(\gamma^i, C)$, $\gamma^i \in \mathcal{I}^i$.
Par suite, $\bar{e}_{x_i}$ est telle que :

$$(\mu, \bar{e}_{x_i}) \in \mathcal{C}_3^E(\gamma^i, C) \quad \forall \mu \in \mathcal{S}^p \quad \gamma^i \in \mathcal{I}^i$$

et d'après (3.21) :

$$(\mu, \bar{e}_{x_i}) \in \mathcal{C}_3^{*E}(\gamma^i, C) \quad \forall \mu \in \mathcal{S}^p \quad \gamma^i \in \mathcal{I}^i$$

Donc $\gamma^i \in A/\sum^*(C) \implies \gamma^i \in \mathcal{Q}_3^{*E}(C)$, c'est-à-dire :

$$A/\sum^*(C) \subseteq \mathcal{Q}_3^{*E}(C) \quad (3.63)$$

D'après le lemme 3.1 et d'après (3.61), si $\gamma^i \in B/\sum^*(C)$, il existe $\bar{\mu}_{x_i}^*$ telle que :

$$x_0^i + V_2(x^i, \theta_1^i; \tilde{p}_{x^i}^*, e) < C \quad \begin{array}{l} \forall x \in \gamma_i(x^i, \tilde{p}_{x^i}^*, e) \\ \forall e \in \mathcal{E}^E \end{array} \quad (3.64)$$

Par suite on a :

$$(\tilde{p}_{x^i}^*, e) \in \tilde{\mathcal{C}}_3^P(\gamma^i, c) \quad \forall e \in \mathcal{E}^E, \gamma^i \in \Sigma^i$$

Donc $\gamma^i \in \mathcal{B}/\tilde{\Sigma}(c) \implies \gamma^i \in \tilde{\mathcal{Q}}_3^P(c)$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{B}/\tilde{\Sigma}(c) \subseteq \tilde{\mathcal{Q}}_3^P(c) \quad (3.65)$$

De même, on tire de (3.58) :

$$\tilde{\Sigma}(c) \subseteq \tilde{\mathcal{Q}}_3^P(c) \quad (3.66)$$

Posons :

$$\widetilde{A/\tilde{\Sigma}(c)} \triangleq (A/\tilde{\Sigma}(c)) \cup \tilde{\Sigma}(c) \subseteq \overline{A/\tilde{\Sigma}(c)}$$

$$\widetilde{B/\tilde{\Sigma}(c)} \triangleq (B/\tilde{\Sigma}(c)) \cup \tilde{\Sigma}(c) \subseteq \overline{B/\tilde{\Sigma}(c)}$$

D'après (3.63), (3.65) et (3.66), on a :

$$\widetilde{A/\tilde{\Sigma}(c)} \subseteq \overline{\tilde{\mathcal{Q}}_3^E(c)}$$

$$\widetilde{B/\tilde{\Sigma}(c)} \subseteq \overline{\tilde{\mathcal{Q}}_3^P(c)}$$

donc :

$$\widetilde{\Sigma^*}(c) = \widetilde{A/\Sigma^*(c)} \cap \widetilde{B/\Sigma^*(c)} \subseteq \overline{\widetilde{Q_3^P}(c)} \cap \overline{\widetilde{Q_3^E}(c)}$$

et comme $\widetilde{\Sigma^*}(c) \subset \mathcal{G}$, on a :

$$\widetilde{\Sigma^*}(c) \subseteq \mathcal{G} \cap \overline{\widetilde{Q_3^P}(c)} \cap \overline{\widetilde{Q_3^E}(c)} \quad (3.67)$$

En comparant (3.67) à (2.12), on voit que :

$$\widetilde{\Sigma^*}(c) \subseteq \widetilde{\Xi}_3(c)$$

où $\widetilde{\Xi}_3(c)$ est la surface du jeu 3 pour une constante C donnée (cf. définition 2.4).

Remarquons que $\widetilde{B/\Sigma^*(c)} = \Omega(c)$ (cf. (3.44)).

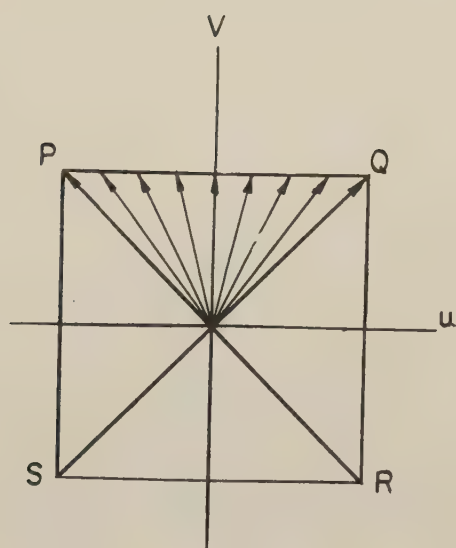


Fig.1.1

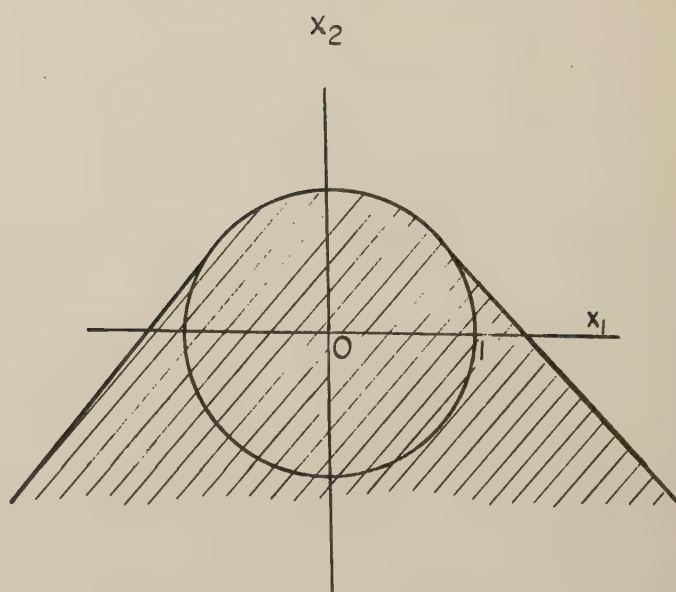


Fig.1.2

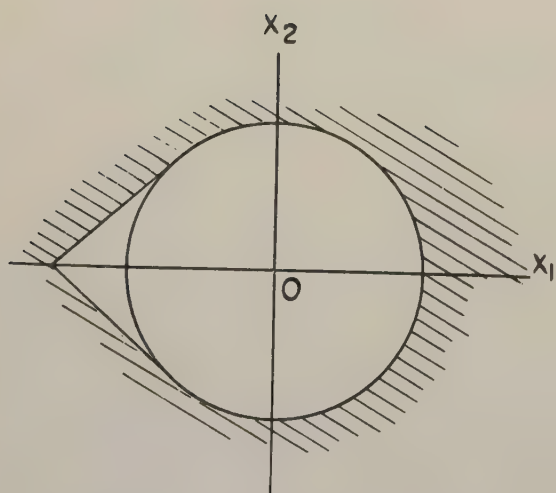


Fig.1.3

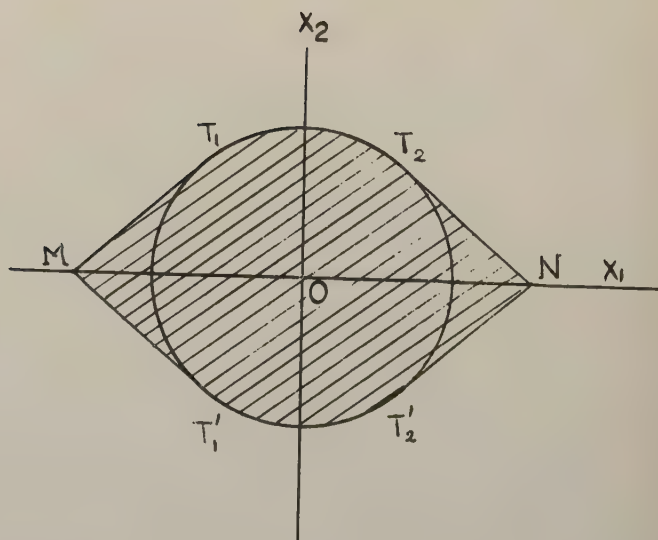


Fig.1.4

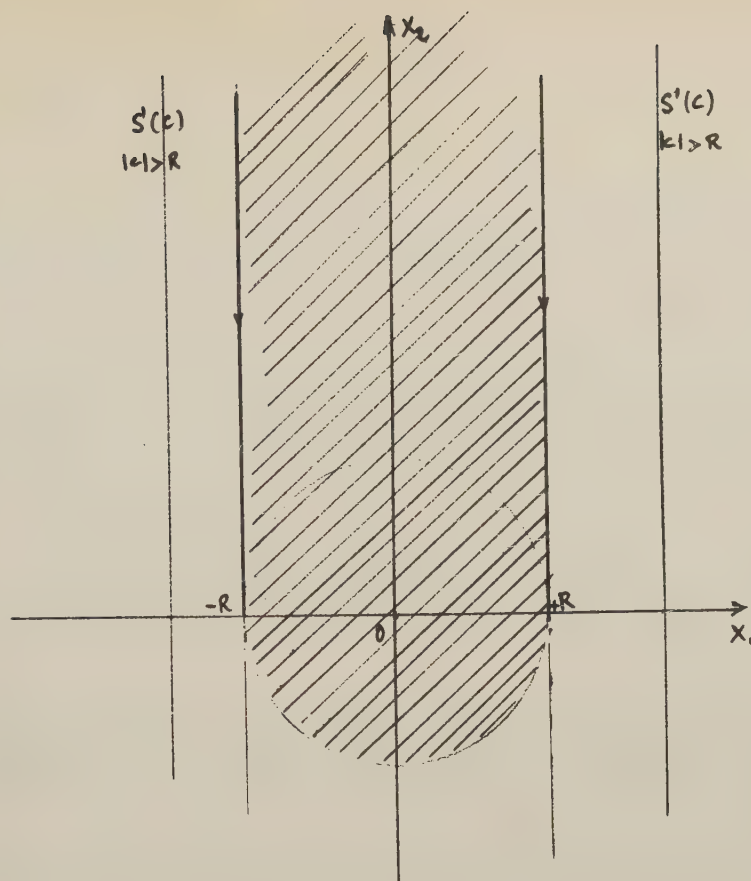


Fig. 2.1. (Exemple 2.1.)

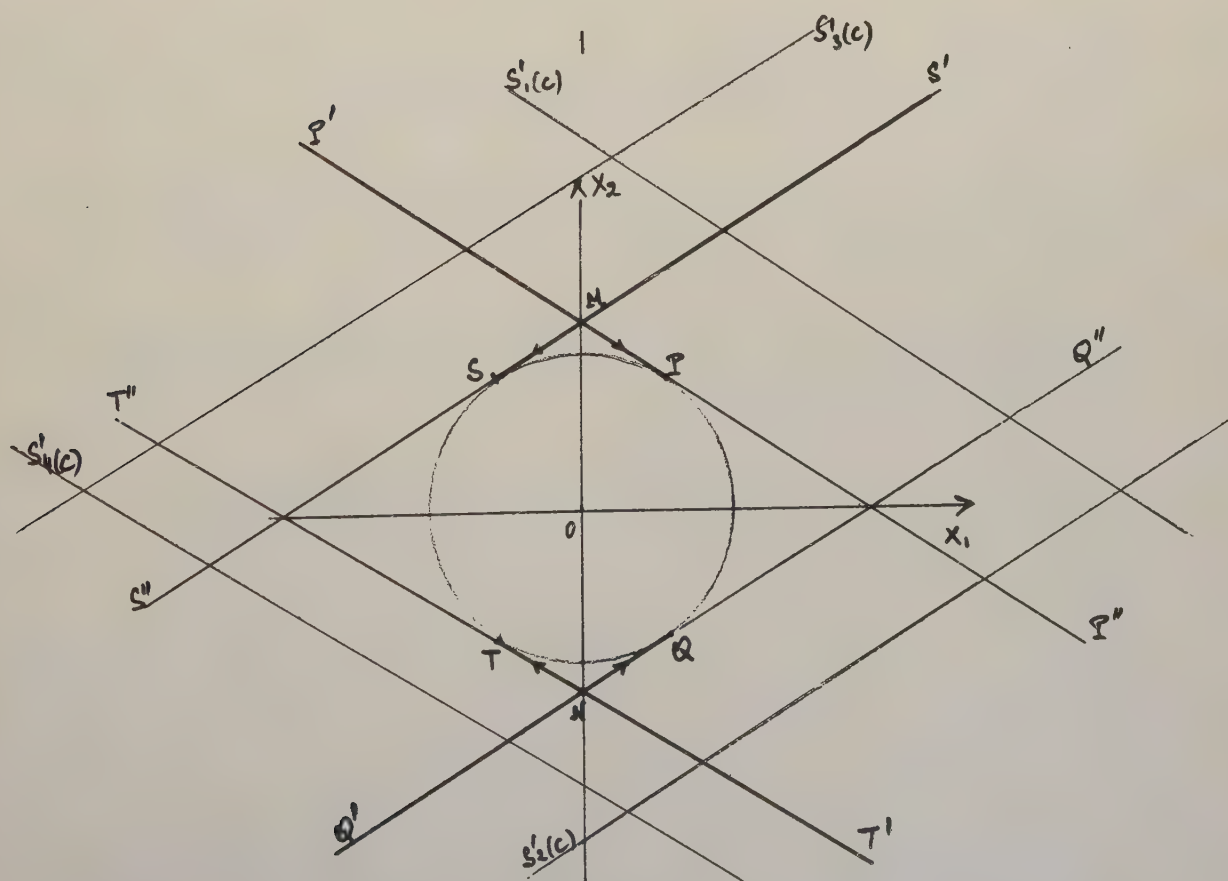


Fig. 2.2. (Exemple 2.2.)

REFERENCES

- (1) - BERKOVITZ, L.D., A Variational Approach to Differential Games, in Advances in Game Theory, Princeton University Press, Princeton, 1964, pp. 127 - 174.
- (2) - BERKOVITZ, L.D., Necessary Conditions for Optimal strategies in a Class of Differential Games and Control Problems, in J. SIAM Control. Vol. 5, No 1, 1957, pp. 1-24.
- (3) - HO, Y.C., BRYSON, A.E., and BARON, S., Differential Games and Optimal Pursuit Evasion Strategies, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-10, Octobre 1965, pp. 385 - 389.
- (4) - LEITMANN, G., and MON, G. Some Geometric Aspects of Differential Games, J. Astr. Sc. Vol. XIV, No 2. Mar-April. 1967. pp. 56-67.
- (5) - LEITMANN, G., and MON, G., On a Class of Differential Games, Colloquium on Advanced Problems and Methods for Space Flight Optimization, Université de Liège, Belgique, Juin 1967.
- (6) - BLAQUIERE, A., and LEITMANN, G., On the Geometry of Optimal Processes - Part I, Rpt. AM 64-10, I.E.R., University of California, Berkeley, 1964.
- (7) - BLAQUIERE, and LEITMANN, G., On the Geometry of Optimal Processes - Part II, Rpt. AM 65-11, I.E.R., University of California, Berkeley, 1965.
- (8) - BLAQUIERE, A., and LEITMANN, G., On the Geometry of Optimal Processes, Chap. 7, Topics in Optimization, Academic Press, N.Y., 1967.
- (9) - ISAACS, R., Differential Games, Wiley, N.Y., 1965.

- (10) - SANSONE, G., and CONTI, R., Nonlinear Differential Equations Pergamon Press - 1964.
- (11) - LEITMANN, G., Some Geometrical Aspects of Optimal Processes, J. SIAM on Control, Ser, A, Vol. 3, No 1, 1965, pp. 53-65.
- (12) - BLAQUIERE, A., Further Investigation into the Geometry of Optimal Processes, J. SIAM on Control, Ser. A. Vol. 4, no. 1 1966, pp. 19-33.
- (13) - LEITMANN, G., An Introduction to Optimal Control, Mc Graw Hill N. Y. , 1966.

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

'Etude de la convexité directionnelle'

VU ET APPROUVE :

Paris, le 26 juin 1968

LE DOYEN DE LA FACULTE DES SCIENCES,

Marc ZAMANSKY

VU

ET PERMIS D'IMPRIMER :

LE RECTEUR DE L'ACADEMIE

DE PARIS,

Jean ROCHE

